2. МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО И ПОЛИТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

2.1. Базовая модель социальных взаимодействий

Роль конкуренции в природе и обществе чрезвычайно велика. В одних случаях конкуренция может способствовать прогрессивному развитию природных и социальных процессов; в других случаях она может оказывать деструктивное действие, приводить к гибели биологических видов, к экономическим кризисам и разрушительным войнам[1]. Возникает вопрос: можно ли математически описать столь разные проявления конкуренции в рамках одной модели?

Описанию и моделированию конкурирующих сообществ посвящено большое количество работ [см., например: Балацкий 2008: 54–70; Чернавский и др. 2006; Портер 2005; Рубин 2004], однако они, как правило, посвящены конкретным видам конкуренции. В настоящей работе мы на основе базовой математической модели конкуренции рассмотрим различные ситуации и результаты ее проявления, а также установим формализованные критерии перехода от одной ситуации к другой. В следующих статьях мы рассмотрим и проанализируем модели конкретных социальных процессов, в которых реализуются указанные базовые ситуации.

2.1.1. Описание базовой модели

Опишем базовую модель конкуренции. Пусть имеется N взаимодействующих сообществ (биологических или социальных), причем каждое сообщество описывается вектором характеристик X_i ($i = 1 \ldots N$). Тогда взаимодействие этих сообществ в обобщенном виде может быть описано системой уравнений:

[1] Яркие примеры дуалистичного проявления конкуренции дает экономика: с одной стороны, конкуренция считается двигателем экономического развития, с другой – конкуренция приводит к разорению фирм, безработице, имущественному расслоению и социальным взрывам.

$$\frac{dX_i}{dt} = A_i(X_i) + \sum_{j \neq i}^{N} B_{ij}(X_i, X_j), \quad i, j = 1...N, \tag{1}$$

где функционал $A_i(X_i)$ описывает автономное развитие сообществ (без учета их взаимодействия), а функционалы $B_{ij}(X_i, X_j)$ учитывают взаимодействие сообществ друг с другом (для упрощения изложения будем рассматривать только парное взаимодействие). Также для упрощения будем считать, что каждое i-е сообщество описывается только одной характеристикой x_i, тогда уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^{N} B_{ij}(x_i, x_j), \quad i, j = 1...N. \tag{2}$$

Разлагая в ряд и ограничиваясь линейными и квадратичными членами, из формулы (2) получаем:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} x_i x_j, \quad i, j = 1...N, \tag{3}$$

где a_i и b_{ij} – параметры модели.

Учтем специфику конкурентных взаимоотношений и рассмотрим простейший случай $N = 2$, тогда из выражения (3) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - b_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - b_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Параметры a_1, a_2 характеризуют собственные механизмы роста переменных x_1 и x_2 рассматриваемых сообществ (например, размножение организмов в биологических популяциях). Параметры b_1, b_2 характеризуют ограничения, накладываемые на рост переменных x_1 и x_2 (например, ограниченность имеющихся ресурсов). Параметры c_1, c_2 характеризуют *конкурентное* взаимодействие между рассматриваемыми акторами, поэтому перед соответствующими членами в выражении (4) стоит знак «минус»: конкурирующие акторы хотят подавить своего соперника и наносят ущерб друг другу, поэтому их взаимодействие приводит к уменьшению значений переменных как x_1, так и x_2.

Наложим ограничения на знаки параметров и переменных в модели (4). Примем условия для параметров: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$,

$b_1 > 0$, $b_2 > 0$, а также будем интересоваться решениями в области $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

В случае конкуренции должно выполняться условие $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Это в соответствии с (4) означает следующее: в результате конкурентного взаимодействия происходит ослабление каждого актора (значения x_1 и x_2 уменьшаются), что играет негативную роль. Это свойство конкурентной системы можно наглядно проиллюстрировать с помощью ее фазового портрета [Богданов 2008]. Для этого требуется построение изоклин – линий, на которых производная по времени одной из переменных равна нулю.

Приравнивая к нулю правые части выражения (4), получаем следующий набор изоклин в виде четырех прямых:

$$a_1 - b_1 x_1 - c_1 x_2 = 0,\ a_2 - b_2 x_2 - c_2 x_1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0. \quad (5)$$

Первую и вторую изколины удобно записать в преобразованной форме:

$$x_2 = a_1 / c_1 - x_1 b_1 / c_1,\ x_2 = a_2 / b_2 - x_1 c_2 / b_2. \quad (6)$$

Точки пересечения любой изоклины, полученной из первого уравнения (4), с любой изоклиной, полученной из второго уравнения (4), являются положениями равновесия. Таким образом, имеем следующие формулы для равновесных точек в системе:

1) начало координат ($x_1 = 0, x_2 = 0$); (7)

2) ($x_1 = a_1 / b_1, x_2 = 0$); (8)

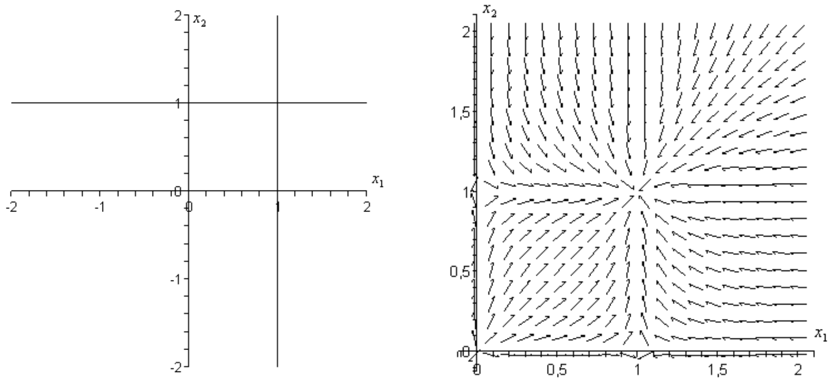
3) ($x_1 = 0, x_2 = a_2 / b_2$); (9)

4) $\left(\dfrac{a_1 b_2 - a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2}, \dfrac{a_2 b_1 - a_1 c_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2}\right)$. (10)

Если одна из переменных равна нулю в начальный момент времени, то она и остается равной нулю. А это значит, что никакие траектории не могут пересекать оси координат. Динамика системы вдоль осей в общем случае описывается уравнениями первого порядка: $\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_1^{\,2}$, $\dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 x_2^2$, имеющими точки бифуркации при $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ соответственно.

Рассмотрим типовые ситуации для случая, близкого к симметричному (когда $a_1 \approx a_2$, $b_1 \approx b_2$, $c_1 \approx c_2$).

Пусть конкурентное взаимодействие отсутствует ($c_1 = c_2 = 0$), то есть развитие сообществ является автономным, не зависящим друг от друга. Тогда изоклины и фазовый портрет будут иметь вид, изображенный на рис. 2.1 (где $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 1$). Стрелочки на фазовом портрете показывают, в каком направлении будет происходить изменение характеристик системы (значений x_1 и x_2) с течением времени в процессе ее эволюции.

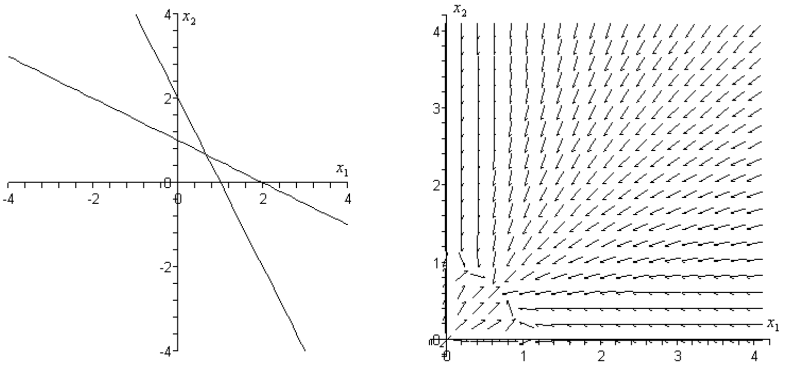


а) б)

Рис. 2.1. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) в случае автономного развития (взаимодействие сообществ отсутствует: $c_1 = c_2 = 0$)

Из рис. 2.1 видно, что в системе (4) существует одно устойчивое состояние равновесия с характеристиками ($x_1 = a_1 / b_1, x_2 = a_2 / b_2$), к которому с течением времени эволюционирует система.

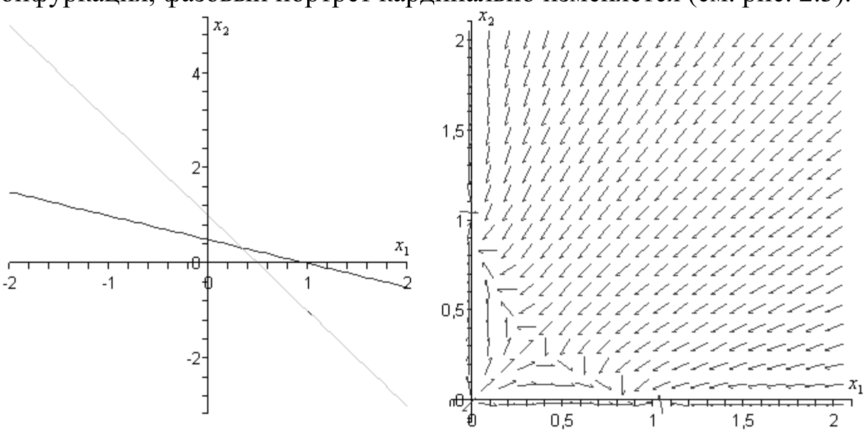
Если между сообществами возникает конкурентное взаимодействие ($c_1 > 0, c_2 > 0$), то ситуация изменяется. В случае если конкурентное взаимодействие не слишком сильное и удовлетворяет условию $c_1 c_2 < b_1 b_2$, то просто происходит смещение устойчивого положения равновесия в область меньших значений x_1 и x_2 (см. рис. 2.2), то есть состояние обоих сообществ ухудшается.



а) б)

Рис. 2.2. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае относительно слабого конкурентного взаимодействия ($c_1c_2 < b_1b_2$)

Если интенсивность конкурентного взаимодействия усиливается и в какой-то момент превышает порог $c_1c_2 = b_1b_2$, то происходит бифуркация, фазовый портрет кардинально изменяется (см. рис. 2.3).



а) б)

Рис. 2.3. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ($c_1c_2 > b_1b_2$)

Видно, что вместо одного устойчивого состояния равновесия возникает два, но в каждом из них существует только одно сообщество, а второе погибает, не выдержав конкурентной борьбы (такая ситуация соответствует, например, разорению фирм или поражению государства в войне). То, какое из сообществ окажется победителем, а какому суждено погибнуть, зависит от начальных условий.

Таким образом, сравнение автономного развития с развитием при наличии конкуренции формально свидетельствует в пользу первого. Возникает вопрос: чем же тогда обосновано расхожее мнение о том, что конкуренция полезна для биологических и социальных сообществ? Ответ заключается в следующем: результат конкурентных отношений зависит от реакции на них взаимодействующих акторов и от особенностей рассматриваемой ситуации. Поясним это, используя модель (4), и выведем математические критерии смены отрицательного эффекта от конкуренции на положительный и наоборот.

Итак, формально из модели (4) следует, что конкуренция приводит к ухудшению характеристик взаимодействующих сообществ и угнетает их развитие (поскольку перед членами, учитывающими конкурентное взаимодействие в выражении (4), стоит знак «минус»). Это соответствует случаю пассивного поведения акторов. Но возможен вариант, когда конкурирующие сообщества начинают мобилизовывать свои собственные ресурсы в стремлении выйти победителем в конкурентной борьбе. И это может привести к тому, что оба данных сообщества начинают развиваться интенсивнее.

Математически это можно выразить следующим образом: у рассматриваемых сообществ параметры a_1, a_2 перестают быть постоянными и начинают зависеть от переменных, характеризующих сообщество-конкурента, например, приобретая следующий вид:

$$a_1 \to a_1 + h_1 x_2 \ , \ a_2 \to a_2 + h_2 x_1 . \qquad (11)$$

Такая запись означает следующее: чувствуя угрозу своему существованию в результате деятельности конкурента, i-е сообщество мобилизует внутренние ресурсы и интенсифицирует механизмы собственного роста. Это сказывается на увеличении параметра a_i пропорционально существующей угрозе (то есть пропорционально «силе» x_j конкурента). Коэффициенты h_i отражают возможности для наращивания собственного роста (к которым относятся ресурсные, технические, организационные, интеллектуальные и другие возможности).

В итоге с учетом реакции рассматриваемых сообществ на конкуренцию со стороны соперника система уравнений (4) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(a_1 + h_1 x_2\right) x_1 - b_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2 = a_1 x_1 - b_1 x_1^2 + g_1 x_1 x_2; \\ \dot{x}_2 &= \left(a_2 + h_2 x_1\right) x_2 - b_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2 = a_2 x_2 - b_2 x_2^2 + g_2 x_1 x_2, \end{aligned} \qquad (12)$$

где параметры g_1 и g_2 равны:

$$g_1 = h_1 - c_1, \; g_2 = h_2 - c_2, \qquad (13)$$

они могут принимать как *отрицательные*, так и *положительные* значения. Это основное отличие системы уравнений (12) от (4), в которой члены, описывающие взаимодействие, *всегда* имели отрицательное значение.

Рассмотрим, к чему приводит такое преобразование базовой математической модели, описывающей конкурентное взаимодействие. Для этого снова обратимся к анализу фазовых портретов.

Приравнивая к нулю правые части (12), получаем следующий набор изоклин в виде четырех прямых:

$$a_1 - b_1 x_1 + g_1 x_2 = 0, \; a_2 - b_2 x_2 + g_2 x_1 = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 0. \quad (14)$$

Первую и вторую изоклины удобно записать в преобразованной форме:

$$x_2 = -a_1 / g_1 + x_1 b_1 / g_1, \; x_2 = a_2 / b_2 + x_1 g_2 / b_2. \qquad (15)$$

Соответственно имеем следующие формулы для равновесных точек в системе:

1) начало координат ($x_1 = 0, x_2 = 0$); (16)

2) ($x_1 = a_1 / b_1, x_2 = 0$); (17)

3) ($x_1 = 0, x_2 = a_2 / b_2$); (18)

4) $\left(\dfrac{a_2 g_1 + a_1 b_2}{b_1 b_2 - g_2 g_1}, \dfrac{a_2 b_1 + a_1 g_2}{b_1 b_2 - g_1 g_2}\right)$. (19)

Сравнение с формулами (7)–(10) показывает, что первые три точки равновесия остаются прежними, а четвертая изменяется.

Рассмотрим для более наглядного понимания динамики некоторые частные случаи системы (12). Допустим, что равны между собой начальные значения обеих переменных и попарно равны коэффициенты при соответствующих слагаемых в первом и во втором уравнениях (12) (то есть $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $g_1 = g_2 = g$).

Тогда оба сообщества развиваются в соответствии с уравнением Бернулли:

$$\dot{x}_i = ax_i + (-b + g)x_i^2. \tag{20}$$

Это уравнение имеет бифуркацию при $g = b$. В точке бифуркации ($g = b$) имеет место *экспоненциальное* решение, описывающее непрерывный рост обеих сообществ. Сдвиг значений какого-либо из двух параметров в сторону $g < b$ приводит к *логистическому* уравнению с насыщением: рост переменных x_1 и x_2 ограничен значением $a/(b - g)$. Сдвиг значений какого-либо из двух параметров в сторону $g_i > b_i$ приводит к уравнению неограниченного роста с обострением. Четвертое положение равновесия приобретает в этом случае упрощенный вид: $(a/(b-g), a/(b-g))$, то есть лежит на линии $x_1 = x_2$. При условии $g > b$ оно оказывается в отрицательной области.

Рассмотрим вопрос об устойчивости положений равновесия системы (12). Система допускает возможность аналитического рассмотрения вопроса об устойчивости положений равновесия посредством исследования линеаризованной системы (первый метод Ляпунова).

Точка ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) является неустойчивой при $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то есть во всей интересующей нас области параметров. Для положения равновесия ($x_1 = a_1/b_1$, $x_2 = 0$) условием устойчивости является неравенство $a_2 < -g_2 a_1/b_1$. Для положения равновесия ($x_1 = 0$, $x_2 = a_2/b_2$) условием устойчивости является неравенство $a_1 < -g_1 a_2/b_2$. Условием устойчивости точки $\left(\dfrac{a_2 g_1 + a_1 b_2}{b_1 b_2 - g_2 g_1}, \dfrac{a_2 b_1 + a_1 g_2}{b_1 b_2 - g_1 g_2}\right)$, когда она расположена в области положительных значений переменных, является неравенство $g_1 g_2 < b_1 b_2$.

В зависимости от того, устойчива или нет каждая из трех точек равновесия за пределами начала координат, могут реализовываться различные варианты конкурентной системы.

2.1.2. Анализ основных вариантов поведения системы

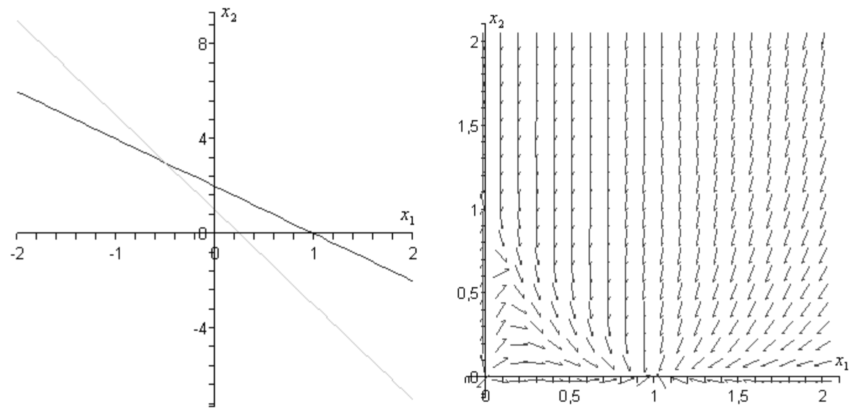
Рассмотрим более подробно динамику конкурентных отношений при различном соотношении параметров модели (12). Для всех дальнейших вариантов и иллюстративных расчетов примем фиксированные значения следующих коэффициентов: $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ (реально это означает, что параметры автономного развития рассматриваемых сообществ идентичны и в этом смысле ситуация симметрична: никто не имеет априорного преимущества).

Вариант 1. Случай *сильного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ при *отрицательных* и примерно равных по абсолютному значению g_1 и g_2.

Этот случай соответствует ситуации, отраженной на рис. 2.3, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является гибель одного из сообществ. При этом в силу примерного равенства значений g_1 и g_2 исход конкурентной борьбы заранее не ясен, многое зависит от начальных условий и от того, насколько сильно конкурирующие сообщества могут влиять на значения g_1 и g_2.

Вариант 2. Случай *сильного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ при *отрицательных* и существенно отличающихся по абсолютному значению g_1 и g_2.

Этот случай тоже соответствует ситуации, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является гибель одного из сообществ. Отличие от варианта 1 заключается в том, что исход борьбы заранее известен: побеждает актор, которому удалось найти уязвимые места противника и добиться решающего преимущества (см. рис. 2.4, где $g_1 = -0{,}5$, $g_2 = -4$).



а) б)

Рис. 2.4. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ($|g_1 g_2| > b_1 b_2$) и явного преимущества одной из сторон

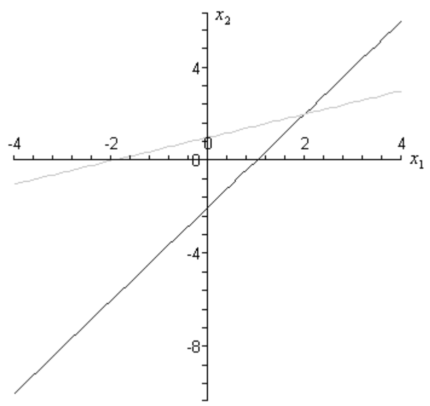
Видно, что каково бы ни было исходное состояние, результат предрешен: побеждает сторона, использующая более эффективную стратегию конкурентной борьбы.

Вариант 3. Случай *умеренного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| < b_1 b_2$ при *отрицательных* значениях g_1 и g_2.

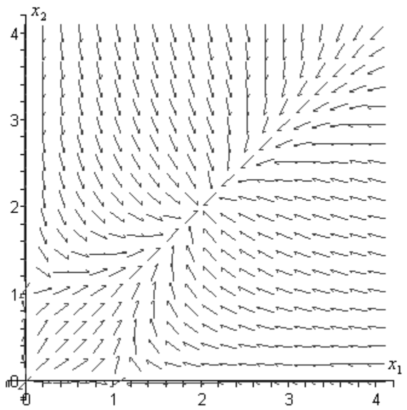
Этот случай соответствует ситуации, отраженной на рис. 2.2, когда влияние конкурентного противоборства не настолько сильное, чтобы приводить к гибели кого-либо из соперников. В этом случае устанавливается новое состояние равновесия с *худшими* (чем в отсутствие конкуренции) характеристиками у всех сообществ. Ни одна из сторон не может победить, но ущерб терпят все (такая ситуация складывается, например, во время затяжных политических, этнических, конфессиональных конфликтов или торговых войн).

Вариант 4. Случай *умеренного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| < b_1 b_2$ при *положительных* значениях g_1 и g_2.

Этот случай соответствует ситуации, когда взаимодействующие стороны, опасаясь поражения в конкурентной борьбе, мобилизуют резервы и, несмотря на противодействие противника, наращивают темпы роста, как это описано в выражении (11). Если возможности для такого наращивания ограничены (например, ресурсными пределами) и выполняется условие $|g_1 g_2| < b_1 b_2$, то в результате устанавливается новое состояние равновесия с *лучшими* (чем в отсутствие конкуренции) характеристиками у всех сообществ (см. рис. 2.5, где $g_1 = 0{,}5$, $g_2 = 0{,}5$).



а)



б)

Рис. 2.5. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае умеренного конкурентного взаимодействия ($|g_1 g_2| < b_1 b_2$) при положительных значениях g_1 и g_2

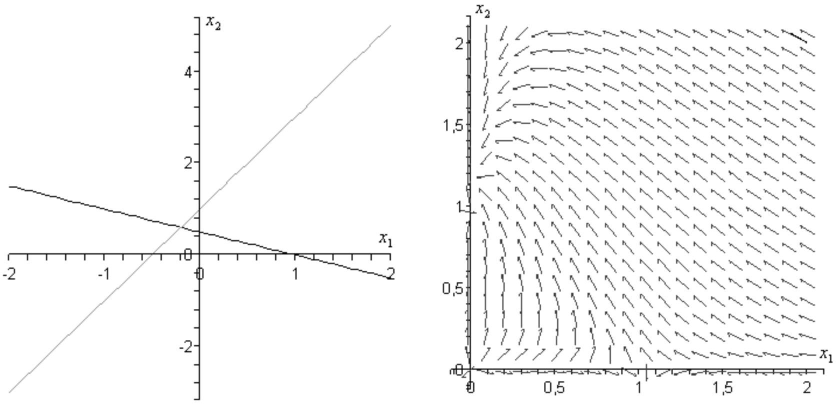
Таким образом, в данном случае конкуренция играет положительную роль, поскольку стимулирует интенсификацию производственных усилий соперничающих сторон, не приводя при этом к дестабилизации системы.

Вариант 5. Случай *сильного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ при *положительном* значении g_i и *отрицательном* значении g_j.

Этот случай соответствует ситуации, когда конкуренция усиливается и при этом одна из сторон в качестве своего приоритета ставит не столько ухудшение состояния соперника, сколько достижение дополнительных преимуществ (например, за счет внедрения новых более совершенных технологий)[2]. На рис. 2.6 показана ситуация, когда сторона 2, мобилизовав свои усилия на развитие и

[2] Впрочем, получение конкурентных преимуществ одной стороной все равно, как правило, приводит к ухудшению состояния конкурирующей стороны.

внедрив новые технологии, получает решающее конкурентное преимущество, что приводит к ее победе над соперником ($g_1 = -2$, $g_2 = 2$).



а) б)

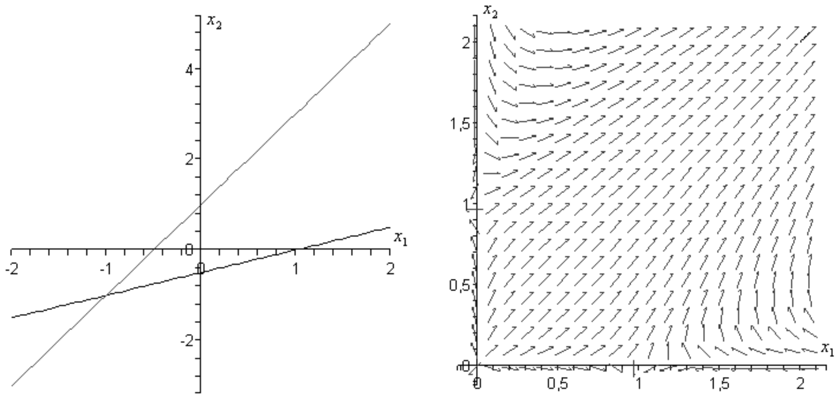
Рис. 2.6. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ($|g_1 g_2| > b_1 b_2$), когда значения g_1 и g_2 имеют разные знаки

Видно, что хотя сторона 2 сконцентрирована не столько на противоборстве, сколько на собственном развитии, в результате она достигает победы над конкурентом с явным преимуществом. Это достаточно типичная ситуация в современном бизнесе, когда фирма-лидер побеждает и поглощает своих менее удачливых конкурентов.

Особенностью данного варианта является то, что значения g_1 и g_2 имеют разные знаки. Такая ситуация возникает, в частности, при наличии жестких ресурсных ограничений (в том числе ограничений покупательского спроса, если речь идет о конкуренции фирм на потребительском рынке): в этом случае успех одной стороны автоматически ведет к проигрышу стороны-конкурента (так называемая «игра с нулевой суммой»). Такая ситуация благоприятна для возникновения монополизма, для подавления лидером всех своих конкурентов.

Вариант 6. Случай *сильного* конкурентного взаимодействия $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ при *положительных* значениях g_1 и g_2 .

Эта ситуация, соответствующая «игре с положительной суммой», когда все конкуренты стремятся вырваться вперед и при этом имеющихся ресурсов хватает на всех (либо конкурирующие стороны сами в процессе своей деятельности создают необходимые им ресурсы). В этом случае, несмотря на возможные расхождения в темпах развития, идет непрерывный (и убыстряющийся) рост всех конкурирующих сообществ, ни одно из которых в этой гонке не гибнет (см. рис. 2.7, где $g_1 = 2$, $g_2 = 2$).



а) б)

Рис. 2.7. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ($|g_1 g_2| > b_1 b_2$) при положительных значениях g_1 и g_2

Частным случаем варианта 6 является режим роста с обострением, который обсуждался выше и которому соответствует уравнение (10). Этот режим встречается в моделях долгосрочного демографического и экономического роста [Von Foerster *et al.* 1960: 1291–1295; Марков, Коротаев 2009; Андреев, 2009: 25–38; Кирилюк, Малков 2011: 266].

Таким образом, анализ системы (12) показывает, что в зависимости от особенностей внешних условий и поведения сторон конкуренция может приводить как к ухудшению характеристик (и даже к гибели) взаимодействующих сообществ, так и к их непрерывному росту. Конкретный режим, который реализуется в результате конкуренции, определяется следующими условиями:

1) соотношение между величинами $|g_1 g_2|$ и $b_1 b_2$ (*сильное* или *умеренное* конкурентное взаимодействие);

2) знаки величин g_1 и g_2;

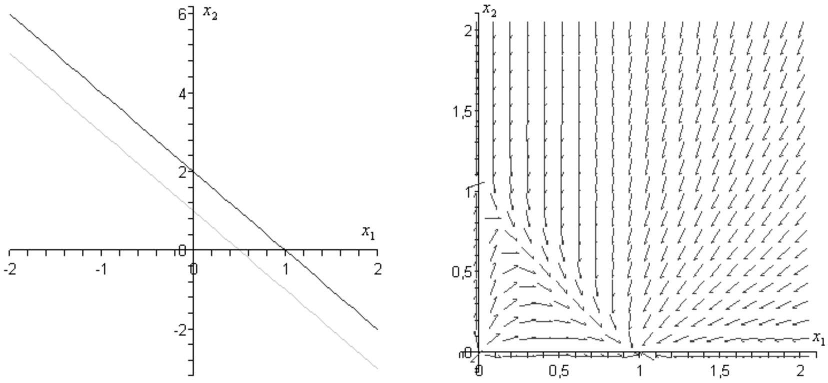
3) ограниченность или достаточность ресурсов (игра с нулевой или положительной суммой).

2.1.3. Поведение системы в негрубых случаях

Выше были рассмотрены ситуации, когда поведение системы (12) является «грубым», по А. А. Андронову [Андронов, Понтрягин 1937: 247–250]. Такие ситуации реализуются, когда изоклины (14) пересекаются, порождая четыре точки равновесия (16)–(19). Однако возможны ситуации, когда первые две изоклины из формулы (14) параллельны друг другу (тогда точек равновесия только три) или сливаются в одну прямую (тогда точек равновесия бесконечно много). Это становится возможным при выполнении условия: $g_1 g_2 = b_1 b_2$. Наиболее интересными с точки зрения практических приложений являются следующие варианты.

Вариант 7. Случай $g_1 g_2 = b_1 b_2$ при *отрицательных* значениях g_i и при $a_2 g_2 \neq a_1 b_1$.

В этом случае первые две изоклины из выражения (14) параллельны друг другу. Этот случай соответствует ситуации, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является гибель одного из сообществ. При этом исход борьбы заранее известен: побеждает сообщество, изоклина которого располагается дальше от начала координат (см. рис. 2.8, где $g_1 = -0{,}5$, $g_2 = -2$).

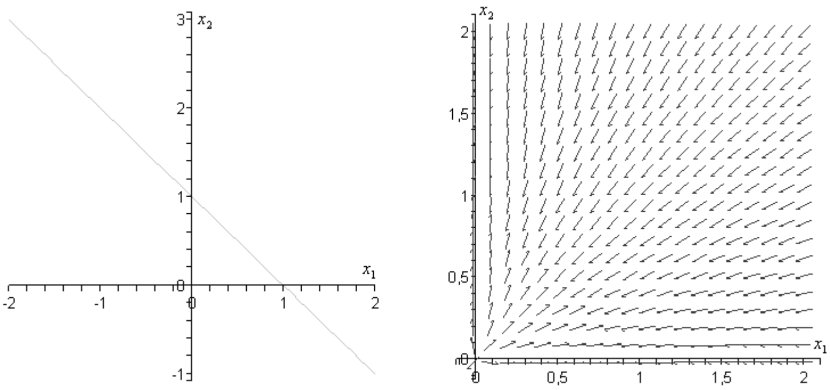


а) б)

Рис. 2.8. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае $g_1 g_2 = b_1 b_2$ при параллельном расположении изоклин

Вариант 8. Случай $g_1 g_2 = b_1 b_2$ при *отрицательных* значениях g_i и при $a_2 g_2 = a_1 b_1$.

В этом случае первые две изоклины из выражения (14) совпадают. Это соответствует ситуации, когда в ходе конкуренции возникает бесконечное множество состояний равновесия и система может устойчиво находиться в любой точке слившихся изоклин (см. рис. 2.9, где $g_1 = -1$, $g_2 = -1$).



а) б)

Рис. 2.9. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае $g_1 g_2 = b_1 b_2$ при совпадающих изоклинах

Несмотря на кажущуюся экзотичность вариантов 7 и 8, они достаточно часто встречаются при экономическом моделировании и имеют большое содержательное значение.

Таким образом, достаточно простая система уравнений может описывать как стремление к положениям равновесия в сообществах с конкуренцией (где она выступает как ограничитель), так и процессы роста, в том числе в режиме с обострением (где конкуренция выступает как стимул). Эта система позволяет также выяснить, при каких значениях параметров происходит переход от одного режима к другому.

Литература

Андреев В. В., Васильева Е. А. 2009. Математическое моделирование и исследование динамики социально-экономической системы России. *Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения* 14: 25–38.

Андронов А. А., Понтрягин Л. С. 1937. Грубые системы. *Доклады АН СССР* 14(5): 247–250.

Балацкий Е. В. 2008. Моделирование процессов межсекторальной конкуренции. *Общество и экономика* 5: 54–70.

Богданов Р. И. 2008. *Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты.* М.: Вузовская книга.

Кирилюк И. Л., Малков С. Ю. 2011. Модель эндогенного роста в конкурентных системах. *Математика. Компьютер. Образование*: сб. науч. тезисов. Вып. 18. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». С. 266.

Марков А. В., Коротаев А. В. 2009. *Гиперболический рост в живой природе и обществе.* М.: ЛИБРОКОМ.

Портер М. Э. 2005. *Конкуренция*. М.: Вильямс.

Рубин Ю. Б. 2004. Теория и практика предпринимательской конкуренции. М.: Маркет ДС Корпорейшн.

Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зульпукаров М.-Г. М. 2006. *Модель конкуренции.* Препринт № 64. М.: Институт прикладной математики РАН им. М. В. Келдыша.

Von Foerster H., Mora P. M., Amiot L.W. 1960. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At This Date Human Population will Approach Infinity if it Grows as it has Grown in the Last Two Millenia. *Science* 132(3436): 1291–1295.