I. МАЛЬТУЗИАНСКИЕ И ПОСТМАЛЬТУЗИАНСКИЕ ЛОВУШКИ

1 Математические модели мальтузианской экономики

С. А. Нефедов

В развернувшейся в последние годы дискуссии о мальтузианском характере доиндустриальной экономики широко используются простейшие математические модели. Статья посвящена анализу известных моделей Вуда, Фукленда – Воота, Ашрафа – Гэлора, Моле – Шаапа, Брандера – Тэйлора на предмет их соответствия мальтузианским постулатам. Показано, что данные модели не могут претендовать на то, что они описывают все варианты мальтузианской динамики, и аргументы авторов, основанные на использовании этих моделей, не являются корректными. Автор предлагает две модели, которые более адекватно описывают мальтузианские закономерности.

Ключевые слова: *мальтузианство, экономико-математические модели, демографические колебания, рост населения, динамика потребления, демографический кризис, клиодинамика.*

До недавнего времени большинство экономических историков склонялись к выводу о мальтузианском характере средневековой экономики (Allen 2008: 951). Однако после появления работы Р. Ли и М. Андерсона (Lee, Anderson 2002) этот вывод стал подвергаться сомнению. Началась дискуссия о том, в какой степени имеющиеся данные подтверждают мальтузианскую связь между демографической динамикой и динамикой потребления (реальной заработной платы). При этом широко использовались простейшие математические модели мальтузианской экономики.

Первая по времени опубликования и популярности модель принадлежит Р. Ли (Lee 1980). В этой модели зависимость между реальной заработной платой w_t (потреблением) и трудовыми ресурсами N_t (населением) описывается формулой:

$$w_t = exp(\mu + \rho t + \varepsilon_t)\, N_t^{-\eta}, \tag{1}$$

или в логарифмической форме:

$$ln\, w_t = \mu + \rho t - \eta\, ln\, N_t + \varepsilon_t. \tag{2}$$

Здесь t – время; μ, ρ, η – некоторые неотрицательные константы; ε_t – переменная, которая обозначает влияние климата и других экзогенных параметров. Коэффициент ρ описывает увеличение капитала и улучшение технологии, и в мальтузианской экономике $\rho = 0$. Если учесть, что в идеальном случае $\varepsilon_t = 0$, то модель сводится к простой формуле: $w_t = C\,N_t^{-\eta}$, где C – некоторая константа. Недостатки этой формулы очевидны: при малом населении N_t потребление становится близким к бесконечности, а при большом населении – слишком малым для того, чтобы обеспечить существование человека. Кроме того, формула дает лишь связь между населением и потреблением, и в модели отсутствует обратная связь, показывающая, как потребление действует на рост населения. Один из возможных вариантов обратной связи был предложен в работе Дж. Вуда (Wood 1998). Вуд исходит из той же формулы (1), что и Ли, записывая ее в форме:

$$w_t = \theta\,(S_t/N_t)^{\eta}. \tag{1a}$$

Здесь θ – минимальная норма душевого потребления; S_t – максимальное население, которое может существовать на данной территории, когда потребление равно θ. S_t может возрастать с улучшением технологии, но в мальтузианском случае S_t постоянно, $S_t = S_0$. Вуд полагает, что рождаемость b_t и смертность d_t можно описать формулами:

$$b_t = \beta_0 + \beta_1 \ln w_t + \beta_2 d_t, \tag{3}$$

$$d_t = \delta_0 + \delta_1 \ln w_t + \delta_2 b_t. \tag{4}$$

Здесь β_0, β_1, β_2, δ_0, δ_1, δ_2 – некоторые константы. Таким образом, прирост населения описывается формулой:

$$dN_t/dt = (b_t - d_t)N_t. \tag{5}$$

Если выразить b_t и d_t из системы уравнений (3)–(4) и подставить в (5), то мы получим:

$$dN_t/dt = (b_t - d_t)N_t = (c_0 + c_1 \ln w_t)\,N_t,$$

где c_0 и c_1 – некоторые константы. Подставив сюда формулу (1а), получим:

$$dN_t/dt = (c_2 + c_3 \ln N_t)\,N_t, \tag{6}$$

где c_2 и c_3 – некоторые константы. Дифференциальное уравнение (6) имеет стационарное решение: $N_t = N_0 = exp(-c_2/c_3)$, график которого – горизонтальная линия. В силу теоремы существования и единственности решений эту горизонтальную линию не могут пересекать другие решения (интегральные кривые). Ниже этой линии, в области $0 < N_t < N_0$, производная dN_t/dt положительна, поэтому решения монотонно возрастают и интегральные кривые приближаются к горизонтальной линии. Выше этой линии производная dN_t/dt отрицательна, поэтому решения монотонно убывают и интегральные кривые приближаются к горизонтальной линии сверху. В итоге решения не могут колебаться, население не может сначала возрастать, а затем убывать в результате «мальтузианского кризиса». Вуд оправдывает такое поведение построенной им модели, утверждая, что «мальтузианский кризис» «не является необходимой чертой мальтузианских систем». Вуд признает, что в неизбежности «мальтузианского кризиса» убеждены многие экономические историки (см., например: Le Roy Ladurie 1974; Postan, Hatcher 1985: 69), но утверждает, что Мальтус никогда не писал об этом (Wood 1998: 110).

Однако Мальтус вполне определенно писал об уменьшении населения, депопуляции:

> Способность населения к размножению настолько превосходит способность земли к производству средств существования для людей, что к людям так или иначе должна прийти преждевременная смертность. Активными и способными служителями уменьшения населения являются человеческие пороки. Они являются предшественниками великой армии уничтожения, и часто сами могут закончить эту ужасную работу. Но если они не достигнут успеха в этой войне на уничтожение, то эпидемии, мор и чума двинутся вперед ужасным фонтом, унося тысячи и десятки тысяч. Если и они не добьются успеха, то неизбежный гигантский голод выступит последним, и одним могучим ударом уравняет население с продовольственными возможностями (Malthus 1798: 61).

Таким образом, модель Вуда не описывает реальной мальтузианской динамики населения. Однако специфика ситуации заключается в том, что она используется во многих работах, посвященных анализу мальтузианской экономики в традиционном обществе. Иногда используется итерационный вариант этой модели, в котором расчеты производятся от года к году. В варианте Моле – Шаапа (Møller, Sharp 2009) формуле (1а) соответствует ее логарифмическая форма:

$$ln\ w_t = c_0 - c_1 lnN_t + lnA, \tag{2a}$$

а рождаемость и смертность вычисляются по упрощенным формулам:

$$b_t = a_0 + a_1\ lnw_t, \tag{3a}$$

$$d_t = a_2 - a_3\ lnw_t; \tag{4a}$$

численность населения N_t связана с населением N_{t-1} в предыдущем году соотношением:

$$lnN_t = lnN_{t-1} + b_{t-1} - d_{t-1}. \tag{7}$$

В этих формулах A, c_0, c_1, a_0 ... a_3 – некоторые положительные константы. Подставляя (3а) и (4а) в (7), получим:

$$lnN_t = lnN_{t-1} + (a_1 + a_3)\ lnw_{t-1} + a_0 - a_2 =$$
$$= lnN_{t-1} + (a_1 + a_3)(c_0 - c_1 lnN_{t-1} + lnA) + a_0 - a_2 = ulnN_{t-1} + lnv,$$

где u и v – некоторые константы.

В итоге мы получим:

$$N_t = v(N_{t-1})^u. \tag{8}$$

Эта формула генерирует последовательность значений для численности населения. Пусть, условно, в начальный момент население составляет 1 млн, то есть $N_1 = 1$. Тогда $N_2 = v$, N_3 равно v в степени $1 + u$, N_3 равно v в степени $1 + u + u^2$ и т. д.

Если $|u| > 1$, то $N_t \to \infty$, что при ограниченности ресурсов в мальтузианской теории невозможно. Если $0 < u < 1$, то N_t монотонно стремится к конечному пределу. Наконец, в случае $-1 < u < 0$ мы имеем очень специфическую последовательность, в которой в четных годах население увеличивается, а в нечетных – уменьшается (или наоборот). Таким образом, модель Моле – Шаапа обладает тем же недостатком, что и исходная модель Вуда: она не может описать долговременные колебания численности населения.

Другой вариант итерационной модели – это модель Ашрафа и Гэлора (Ashraf, Galor 2011). Авторы данной модели берут за основу формулу (1а), они учитывают численность взрослых и детей, оптимизируют расходы, но в конечном счете приходят к той же формуле (8).

Еще одним вариантом модели Вуда является модель Фукленда и Воота (Voigtlander, Voth 2009). Они используют формулу (1а), но заменяют формулы (3) и (4) на (3а) и (4а):

$$b_t = b_0 (w_t/\theta)^m, \tag{3а}$$

$$d_t = d_0 (w_t/\theta)^n, \tag{4а}$$

где b_0 и d_0 – некоторые константы. Подставив (1а) в уравнение (5), получим:

$$dN_t / dt = (b_t - d_t)N_t = (b_0(S_0/N_t)^{\eta m} - d_0(S_0/N_t)^{\eta n})N_t = q(p - N_t^{\eta(m-n)})\, N_t^{1-\eta m}, \tag{6а}$$

где p и q – некоторые константы. Дифференциальное уравнение (6а) имеет стационарное решение: $N_t = N_0 = p^{1/\eta(m-n)}$, которое представляет собой горизонтальную линию. Аналогично предыдущему можно показать, что кривые решений, расположенные ниже этой линии, монотонно возрастают, а решения, расположенные выше линии, монотонно убывают. Таким образом, здесь наблюдается та же ситуация, что и в модели Вуда: модель не дает колеблющихся решений.

Еще одна популярная модель была предложена Брандером и Тейлором (Brander, Taylor 1998). В этой модели рассматривается некоторый абстрактный возобновимый ресурс, который расходуется в ходе человеческой деятельности. К примеру, это может быть лес или плодородие почвы. Пусть S_t – наличный (в году t) объем этого ресурса, а K – его природные запасы. Уравнение для расходования ресурса имеет вид:

$$dS_t /dt = rS_t (1 - S_t/K) - u\, S_tN_t\,, \tag{9}$$

где r и u – некоторые константы. Первый член в левой части описывает процесс природного возобновления ресурса, а второй член – уменьшение ресурса в результате хозяйственной деятельности. Уравнение для численности населения имеет вид:

$$dN_t /dt = (d + v\, S_t)N_t\,, \tag{10}$$

где d, v – константы, причем $d < 0$. Это уравнение показывает, что естественный прирост зависит от наличия ресурса S_t.

Брандер и Тейлор показали, что система уравнений (9)–(10) имеет колеблющиеся решения: в условиях изобилия ресурса население растет, а с истощением ресурса убывает до тех пор, пока ресурс не восстановится. Брандер и Тейлор назвали свою модель «мальтузианско-рикардианской». Модель первоначально предназначалась для описания экономики острова Пасхи, но затем стала применяться в более широких условиях, как достаточно общая модель мальтузианской экономики (см., например: Maxwell, Reuveny 2000; D'Alessandro 2007). Однако необходимо отметить, что ресурс S_t в модели Брандера и Тейлора – это не урожай, собираемый земледельцами. Урожай, по Брандеру и Тейлору, – это член $uS_t N_t$, и он *вычитается* из ресурса S_t. Как заметил Р. Шульга (Szulga 2012), такая модель описывает общество собирателей (или охотников), а не общество земледельцев. Мальтус же рассматривал в основном земледельческую экономику. Таким образом, модель Брандера и Тейлора нельзя назвать «мальтузианско-рикардианской».

Напомним, что наша статья посвящена анализу простейших моделей мальтузианской экономики, состоящих не более чем из двух дифференциальных уравнений. Разумеется, существуют более сложные модели (см., например: Usher 1989; Komlos, Artzrouni 1990; Chu, Lee 1994; Galor, Weil 2000; Lee, Tuljapurkar 2008), обладающие большей свободой поведения и дающие в том числе и колеблющиеся решения. Значительное число таких моделей было построено в рамках клиодинамических исследований, активно проводимых в России и США (см., например: Коротаев и др. 2005; 2007; Korotaev, Malkov, Khaltourina 2006; Tsirel 2004; Малков 2009; Турчин 2007; Turchin 2009). Однако недостатком практически всех описанных в литературе моделей является то обстоятельство, что они содержат неопределенные коэффициенты – параметры, значение которых неизвестно и в принципе не может быть установлено. Чем сложнее модель, тем больше в ней присутствует неопределенных коэффициентов. Между тем от этих коэффициентов зависит поведение модели, и при разных значениях коэффициентов динамика населения может иметь качественно различный характер. Таким образом, появляется ситуация неопределенности: поскольку значения коэффициентов неизвестны, то неизвестно, какой из возможных вариантов поведения соответствует исторической реальности и какой из них является на практике нереализуемым.

Во второй части этой статьи мы опишем две простые модели, которые не имеют неопределенных параметров и, на наш взгляд, достаточно адекватно описывают «мальтузианскую» динамику населения.

Пусть, как и ранее, N_t – численность населения в год t, K_t – запасы зерна после сбора урожая, исчисляемые количеством минимальных годовых пайков (1 паек – это примерно 240 кг зерна), r – естественный прирост в благоприятных условиях. Площадь посевов и урожай зависят от численности населения и при возрастании населения стремятся к некоторой константе, определяемой максимальной посевной площадью, находящейся во владении земледельческого сообщества. Мы будем считать, что урожай определяется формулой: $P_t = aN_t /(N_t + d)$, где a и d – некоторые константы. Для описания динамики населения используем обычное логистическое уравнение:

$$dN_t / dt = rN_t(1 - N_t / K_t). \qquad (11)$$

В логистическом уравнении K_t – это экологическая вместимость (*current capacity*), то есть максимальная численность населения, которое может проживать на данной территории. В нашем случае эта численность соответствует количеству запасенных минимальных годовых пайков. За год расходуется N_t пайков, а прирост запасов будет равен:

$$dK_t /dt = P_t - N_t = aN_t / (N_t + d) - N_t . \qquad (12)$$

Итак, мы имеем простейшую систему двух дифференциальных уравнений (11)–(12). Эта система имеет положение равновесия, когда население и запасы остаются постоянными – это точка $K_0 = N_0 = a - d$.

Если в формуле для dP/dN устремить N к 0, то мы получим a/d – урожай (в количестве пайков), получаемый одним земледельцем в благоприятных условиях (когда население мaлó и он может обработать максимальную площадь). Таким образом, величина $q = a/d$ показывает, сколько семей может прокормить одна земледельческая семья. Из истории аграрных обществ известно, что q обычно колеблется в пределах $1,2 < q < 2$. Имеет смысл выразить a и d через q и N_0:

$$d = N_0 /(q - 1), \quad a = qN_0 /(q - 1).$$

N_0 можно условно приравнять к 1, так что в этой модели мы имеем две константы – r и q, имеющие реальный смысл и колеблющиеся в известных пределах: $0,01 < r < 0,02$, $1,2 < q < 2$. Обычные методы исследования динамических систем позволяют установить, что система (11)–(12) порождает затухающие колебания. Первые колебания могут иметь различный период, но когда кривая приближается к положению равновесия, период близок к:

$$T = 2\pi / \sqrt{(r - r/q - r^2/4)}.$$

Период T уменьшается при увеличении r и q, и соответственно увеличивается при уменьшении этих величин.

Табл. 1. Период колебаний при различных r и q (в годах)

$q \backslash r$	0,01	0,02
1,2	154	110
2,0	89	63

Таким образом, период колебаний в данной модели сопоставим с продолжительностью наблюдаемых в истории многих государств «вековых» демографических циклов (Turchin, Nefedov 2009).

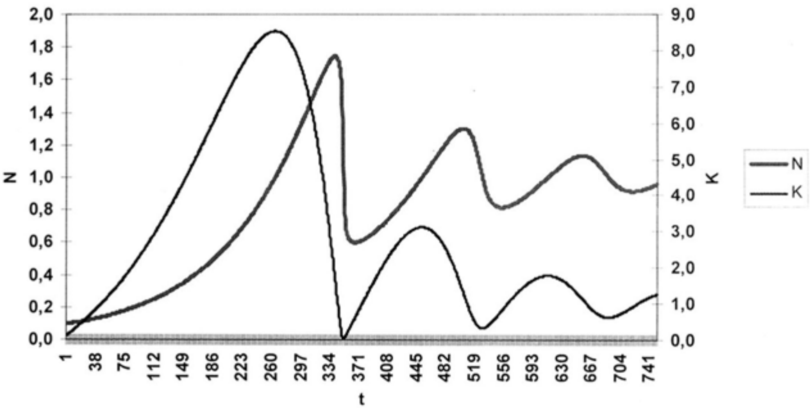

Рис. 1. Пример расчета по модели (r = 0,01; p = 1,2)

Таким образом, согласно предложенной модели, динамика земледельческой популяции имеет колебательный характер. Хотя в теории эти колебания затухают и система стремится к состоянию равновесия, на практике различные случайные и не учтенные здесь воздействия (например, катастрофический неурожай) выводят систему из состояния равновесия, после чего начинается новая серия затухающих колебаний. Специфика земледельческого общества состоит в том, что его экономическая динамика существенным образом зависит от такой случайной величины, как урожайность. Обычно считают, что случайные воздействия имеют экзогенный характер, но зависимость от колебаний урожайности есть неотъемлемая, эндогенная, черта сельскохозяйственного производства. Поэтому мы приходим к выводу о необходимости включения в идеальную модель мальтузианского цикла специальной случайной величины, описывающей урожайность. Это удобно сделать в рамках итерационной модели, при которой расчеты осуществляются от года к году.

Для удобства мы будем рассматривать не календарные, а хозяйственные годы, которые начинаются со сбора урожая. Численность населения N_t в начале года t выражается в числе дворов или семей (условно можно считать населенность двора в 5 человек). Крестьянский двор, в теории (то есть когда хватает земли), обрабатывает стандартный участок земли (такой участок назывался на Ближнем Востоке «чифт»), и максимально возможную площадь пахотных земель мы будем измерять числом стандартных участков S. Когда численность дворов N_t превосходит S, на некоторых участках может разместиться две семьи.

Пусть a_t – урожайность в год t, выраженная числом минимальных семейных пайков зерна, которые можно собрать со стандартного участка. Мы зададим урожайность в виде $a_t = a_0 + d_t$, где a_0 – средняя урожайность, d_t – случайная величина, принимающая значения на отрезке $(-a_1, a_1)$. Величина a_1 меньше a_0 и урожайность a_t меняется в пределах от $a_0 - a_1$ до $a_0 + a_1$. При принятых нами единицах измерения урожай Y_t (в числе пайков) можно выразить в простой форме:

$$Y_t = a_t N_t, \text{ если } N_t < S, \text{ и } Y_t = a_t S, \text{ если } N_t > S.$$

Если в год t имеются излишки зерна, то есть душевое производство $y_t = Y_t/N_t$ больше некоторой величины «удовлетворительного потребления» p^1 $(p^1 > 1)$, то крестьяне потребляют не все это зерно, откладывая часть излишков в запас (мы будем для простоты полагать, что они откладывают половину излишков). Нужно отметить, однако, что в силу условий хранения крестьянские запасы Z_t не могут увеличиваться до бесконечности и ограничены некоторой величиной Z^0. Если имеются излишки сверх этой величины, то все они потребляются. Если же год неурожайный и производство y_t падает ниже уровня p^1, то крестьяне берут зерно из запасов, поднимая, по возможности, потребление до уровня p^1. Если при этом запасов не хватает, то они полностью используются на потребление.

Коэффициент роста населения r_t есть отношение населения последующего года N_{t+1} к населению предыдущего года N_t. Коэффициент роста r_t зависит от потребления p_t. Когда потребление равно минимальной норме ($p_t = 1$), население остается постоянным ($r_t = 1$). Максимальный естественный рост обозначим r^0, а величину потребления, при которой он достигается, – p^0. Мы полагаем $r^0 = 1{,}02$, то есть максимальное увеличение численности населения составляет 2 % в год. Мы будем считать, что при $1 < p_t < p^0$ рост населения линейно зависит от потребления, а при $p_t > p^0$ уже не увеличивается $(r = r^0)$. При $p_t < 1$ зависимость r_t от p_t берется в форме $r_t = p_t$, то есть в случае голода выживает столько людей, сколько имеется продуктовых пайков (все люди, не обеспеченные пищей на год, погибают). Численность населения в следующем году, таким образом, будет равна $N_{t+1} = r_t N_t$.

На Ближнем Востоке и в России достаточно типичным был случай, когда каждая семья могла получать со стандартного участка два минимальных пайка, то есть для численного эксперимента можно взять $a_0 = 2$. Разброс урожайности (величина a_1/a_0) был довольно большим, в Египте, например, порядка 60 % от среднего урожая. Отсюда следует, что можно взять $a_1 = 1{,}2$. Что же касается случайной величины d_t, то ее можно аппроксимировать квадратом равномерного распределения: пусть w – величина, равномерно распределенная на отрезке $(-1,1)$, тогда можно положить $d_t = a_1 w^2 \operatorname{sign}(w)$ (Нефедов, Турчин 2007). Максимальное число стандартных участков S условно можно считать равным 1 млн, а максимальные запасы – десятилетними $(Z^0 = 10)$. Рассмотрим случай, когда крестьяне, вооруженные опытом поколений, начинают откладывать зерно в запас, как только душевое производство превышает 1,05 минимальной нормы ($p^1 = 1,05$). Наш расчет имеет идеализированный характер, поэтому в качестве начального значения населения (в год $t = 1$) можно взять $N_1 = 0,8$. Поскольку результаты расчета зависят от случайной величины (урожайности), то они будут различными при разных прогонах программы. Однако в качественном отношении получается достаточно типичная картина демографических циклов, периодов роста населения, перемежающихся демографическими катастрофами. Продолжительность цикла, как и в предыдущей модели, составляет 80–200 лет (Рис. 2).

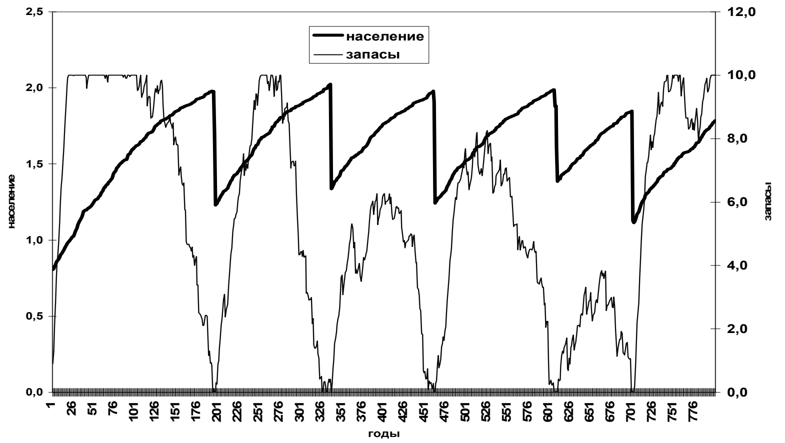

Рис. 2. Пример расчета по модели при $r^0 = 1,02$; $p^0 = 2$; $a_0 = 2$; $a_1 = 1,2$; $p_1 = 1,05$

Конечно, данная модель описывает лишь основной механизм демографического цикла, упуская из виду многие детали, например существование государства и военной элиты или развитие крупного помещичьего землевладения. Эти факторы учтены в других моделях (см., например: Нефедов, Турчин 2007) и расчеты по ним показывают, что по сравнению с предлагаемой моделью качественная картина циклов меняется незначительно. В целом можно, по-видимому, утверждать, что наличие у крестьян запасов зерна долгое время позволяет стабилизировать экономику, однако с ростом населения запасы истощаются и крупные неурожаи рано или поздно приводят к катастрофическому голоду, сопровождаемому эпидемиями, восстаниями голодающих, а также вторжениями внешних врагов, которые спешат воспользоваться кризисом. В итоге численность населения может сократиться в полтора-два раза, а затем начинается новый демографический цикл. В расчетах по модели он начинается сразу после катастрофы, но в реальности кризисные факторы, такие как войны и восстания, имеют некоторую инерцию, они препятствуют восстановлению экономики, поэтому стабилизация наступает не сразу.

В заключение нужно отметить, что после появления модели Вуда среди экономических историков сложилось представление о мальтузианской экономике как о системе, в которой численность населения не может превзойти *current capacity* и поэтому «мальтузианский кризис» невозможен. «Мы полагаем, что существует стандартная модель для роста населения и его отношения к экологической вместимости (*K*), а именно, что наблюдались обычно низкие или несущественные темпы роста населения, – утверждают Д. Рид и С. ле Бланк (Read, LeBlanc 2003). – Эта модель неявно предполагает, что вплоть до недавнего времени численность населения была значительно ниже *K*». В действительности, как признавали Дж. Вуд, Э. Ле Руа Ладюри, М. Постан, Дж. Хэтчер, «многие экономические историки» настаивают на том, что в реальной истории «мальтузианские кризисы» были обычным явлением. Модели, которые описаны в этой статье, показывают, что неизбежность подобных кризисов вытекает из простых законов функционирования аграрной экономики.

Библиография

Коротаев А., Малков С., Гринин Л. (Ред.) 2007. *История и Математика: Анализ и моделирование социально-исторических процессов.* М.: УРСС.

Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. 2005. *Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов. Демография, экономика, войны.* М.: УРСС.

Малков С. Ю. 2009. *Социальная самоорганизация и исторический процесс: Возможности математического моделирования.* М.: УРСС.

Нефедов С. А., Турчин П. В. 2007. Опыт моделирования демографически-структурных циклов. *История и математика: Макроисторическая динамика общества и государства* / Ред. С. Ю. Малков, Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев. М.: УРСС.

Турчин П. 2007. *Историческая динамика. На пути к теоретической истории.* М.: ЛКИ.

Allen R. 2008. A Review of Gregory Clark's A Farewell to Alms: A Brief Economic History of the World. *Journal of Economic Literature* 46: 946–973.

Ashraf Q., Galor O. 2011. Dynamics and Stagnation in the Malthusian Epoch. *American Economic Review* 101(5): 2003–2041.

Brander J., Taylor M. 1998. The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-malthus Model of Renewable Resource Use. *The American Economic Review* 88: 119–138.

Chu C. Y. C., Lee R. D. 1994. Famine, Revolt, and the Dynastic Cycle. *Journal of Population Economics* 7(4): 351–378.

D'Alessandro S. 2007. Non-linear Dynamics of Population and Natural Resources: The Emergence of Different Patterns of Development. *Ecological Economics* 62: 473–481.

Galor O., Weil D. N. 2000. Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond. *The American Economic Review* 90(4): 806–828.

Komlos J., Artzrouni M. 1990. Mathematical Investigations of the Escape from the Malthusian Trap. *Mathematical Population Studies* 2: 269–287.

Korotaev A., Malkov A., Khaltourina D. 2006. *Introduction to Social Macrodynamics: Secular Cycles and Millennial Trends.* Moscow: KomKniga.

Le Roy Ladurie E. 1974. *The Peasants of Languedoc.* Urbana, IL: University of Illinois Press.

Lee C. T., Tuljapurkar S. 2008. Population and Prehistory I: Food-Dependent Population Growth in Constant Environments. *Theoretical Population Biology* 73: 473–482.

Lee R. 1980. A Historical Perspective on Economic Aspects of the Population Explosion: The Case of Preindustrial England. *Population and Economic Change in Developing Countries* / Ed. by R. A. Easterlin, pp. 517–566. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lee R., Anderson M. 2002. Malthus in State Space: Marco Economic–Demographic Relations in English History, 1540–1870. *Journal of Population Economics* 15(2): 195–220.

Malthus T. R. 1798. *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson.

Maxwell J., Reuveny R. 2000. Resource Scarcity and Conflict in Developing Countries. *Journal of Peace Research* 37(3): 301–322.

Møller N., Sharp P. 2009. *Malthus in Cointegration Space: A New Look at Living Standards and Population in Pre-industrial England.* Discussion Paper No. 08–16. Copenhagen: Department of Economics, University of Copenhagen.

Postan M. M., Hatcher J. 1985. Population and Class Relations in Feudal Society. *The Brenner Debate: Agrarian Class Structure and Economic Development in Preindustrial Europe* / Ed. by T. Aston, C. H. E. Philpin, pp. 65–78. Cambridge: Cambridge University Press.

Read D. W., LeBlanc S. A. 2003. Population Growth, Carrying Capacity, and Conflict. *Current Anthropology* 44 (1): 59–85.

Szulga R. S. 2012. Endogenous Population and Resource Cycles in Historical Hunter-Gatherer Economies. *Cliodynamics* 3(2): 234–270.

Tsirel S. V. 2004. On the Possible Reasons for the Hyperexponential Growth of the Earth Population. *Mathematical Modeling of Social and Economic Dynamics* / Ed. by M. Dmitriev, A. Petrov, pp. 367–369. Moscow: Russian State Social University.

Turchin P. 2009. Long-term Population Cycles in Human Societies. *Annals of the New York Academy of Science* 1162: 1–17.

Turchin P., Nefedov S. A. 2009. *Secular Cycles.* Princeton, NY: Princeton University Press.

Usher D. 1989. The Dynastic Cycle and the Stationary State. *The American Economic Review* 79(5): 1031–1044.

Voigtlander N., Voth H.-J. 2009. Malthusian Dynamism and the Rise of Europe: Make War, Not Love. *American Economic Review: Papers & Proceedings* 99(2): 248–254.

Wood J. W. 1998. A Theory of Preindustrial Population Dynamics Demography, Economy, and Well-Being in Malthusian Systems. *Current Anthropology* 39: 99–135.