

9

Феномен урбанизации: единые принципы формирования систем городов

Е. С. Куркина, Е. Д. Куретова

В работе исследуются закономерности распределения численности населения по городам в больших и малых государствах. Построена вероятностная модель распределения городов по численности их населения. Показано, что зависимость числа городов от численности их населения во всех рассмотренных странах хорошо описывается одной и той же функцией распределения, что позволяет сделать предположение об универсальном характере выявленной закономерности.

Рассмотрены также ранговые модели распределения городов по их численности. Показано, что систему городов, содержащую существенную долю небольших городов, лучше описывает модифицированная модель, отличающаяся от закона Циффа.

Установлена взаимосвязь между вероятностной и ранговой моделью.

Ключевые слова: системы городов, закономерности распределения численности населения по городам, вероятностная модель, ранговая модель.

Введение

Феномен урбанизации, сопровождающийся усилением концентрации населения в городах, – это один из самых первых глобальных процессов развития человеческой цивилизации, имеющий сложнейшую многоплановую социально-экономическую, географическую, демографическую природу. Влияние урбанизации на развитие мирового хозяйства настолько велико, что ее иногда называют «тихой революцией».

Первые города зародились еще в глубокой древности, в V–II тысячелетия до н. э. (см.: Гринин, Коротаев 2009: 235) Однако подавляющее число городов появилось значительно позже, и лишь в последние два столетия этот процесс стал приобретать все более масштабный характер. Обычно выделяют три главных этапа в мировом процессе урбанизации. Первый этап приходится на XIX в. и охватывает в основном Европу и Северную Америку. Второй этап (первая половина XX столетия) характеризуется ускорением темпов роста городского населения и постепенным

История и Математика: социально-экономические процессы 2014 206–228

распространением урбанизации на все регионы мира. Вторая половина XX в. – это третий этап процесса урбанизации, получивший название «городской революции» и повлекший глубокие геоурбанистические последствия. Главные его черты – взрывообразный рост количества городов и численности их жителей, концентрация мировой экономической мощи в сравнительно небольшом числе крупных городов наиболее развитых стран, а также расширение и развитие городских сетей по всей периферии мирового хозяйства. Начиная с 1950-х гг. абсолютная численность горожан практически удваивалась каждые 25 лет, и их удельный вес во всем населении возрастал. В 2006 г. произошел так называемый *глобальный урбанистический переход*, при котором численность городского населения перевалила за 50 %, то есть человеческая цивилизация перешла от преимущественно аграрного типа социальных отношений к индустриально-городскому обществу. В развитых странах этот переход осуществился еще в первой половине XX в. и в настоящий момент доля городского населения здесь в среднем составляет 78 % (Слука 2005).

Сам факт эволюционного возникновения, повсеместного распространения, динамического развития и в конечном итоге доминирования городских форм расселения неслучаен. В компактности размещения производительных сил заложен значительный общественный эффект. Города, особенно крупные, обладают гораздо более высокой эффективностью хозяйственной деятельности во многих областях. Они отличаются более высоким уровнем образования, здравоохранения, социальных услуг, предоставляют исключительные возможности для предпринимательства и торговли, творческой деятельности и т. д.

Численность города является важнейшим показателем его развития – параметром порядка, подчиняющим другие показатели. Чем крупнее город, чем больше его численность, тем выше в нем уровень жизни. В подавляющем большинстве случаев численность коррелирует с уровнем развития промышленности, инфраструктуры, экономики, образования, здравоохранения, развитием спорта, социальных услуг и другими важнейшими показателями уровня жизни. Как свидетельствуют данные ООН, при росте абсолютного числа городов все большее количество населения аккумулируют крупнейшие агломерации численностью свыше одного миллиона жителей. В таких городах-миллионерах формируется городская среда особого качества. Сейчас в мире насчитывается свыше 470 агломераций с населением более одного миллиона жителей, в которых проживает примерно 40 % горожан и 20 % всего населения Земли (Подлазов 2009: 229–256).

Исследование динамики развития больших и малых городов на региональном и мировом уровнях, изучение изменения характера распределения населения по населенным пунктам является важной в современных

условиях задач. Несмотря на демографический переход, пройденный развитыми странами, в том числе и Россией, и стабилизацию численности населения этих стран, миграционные процессы продолжают, происходит перераспределение населения по городам. В развитых странах городское население уже достигло 90 %, а в развивающихся странах города продолжают активно расти. Прогнозирование развития городов связано с необходимостью неотложного решения многих практических задач и проблем, например транспортной, жилищной и многих других.

Анализ развития городов различных государств возможен с помощью методов математического моделирования. Для этого необходимо построить модель распределения городов в зависимости от их численности.

Существуют разные подходы к построению такой модели, в том числе вероятностная модель зависимости количества городов от численности их населения и ранговая модель распределения городов по их численности (Подлазов 2009: 229–256; Дмитриев и др. 2010: 61–78).

В данной работе подробно исследуется вероятностная модель. Исследования проводятся на основе статистических данных для ряда государств. Рассматривается также ранговая модель распределения городов по численности. Показано, как эти две модели связаны между собой.

Вероятностная модель распределения городов

Пусть имеется список городов исследуемого региона или государства, упорядоченный по численности их населения x . Заметим, что статус города имеют населенные пункты с численностью $x \geq \tilde{x}$, где \tilde{x} – константа, в общем случае своя для каждого государства или региона. Построим функцию распределения $n(x, \bar{\alpha})$, такую, чтобы число городов n_i , имеющих численность $x \in [x_i, x_i + \Delta_i)$, определялось бы по формуле:

$$n_i = N \int_{x_i}^{x_i + \Delta_i} n(x, \bar{\alpha}) dx, \quad (1)$$

где N – общее число городов, $\bar{\alpha}$ – вектор параметров, в общем случае зависящий от времени.

Исходя из некоторых априорных соображений, функцию $n(x, \bar{\alpha})$ будем искать в виде:

$$n(x, \bar{\alpha}) = e^{-f(x, \bar{\alpha})}. \quad (2)$$

Тогда из (1) следует: $n_i = N \int_{x_i}^{x_i + \Delta_i} n(x, \bar{\alpha}) dx \approx N \Delta_i e^{-f(x_i^*, \bar{\alpha})}$, то есть:

$$f(x_i^*, \bar{\alpha}) \approx -\ln\left(\frac{n_i}{N\Delta_i}\right), \quad (3)$$

где $x_i^* \in [x_i, x_i + \Delta_i)$.

Для нахождения вида функции $f(x, \bar{\alpha})$ весь интервал численностей городов разобьем на промежутки $x \in [x_i, x_{i+1})$. Используя имеющиеся статистические данные для того или иного региона, на каждом из выбранных промежутков вычислим значения n_i . Таким образом, определим набор значений функции $f(x, \bar{\alpha})$ в точках $\{x_i^*\}_{i=1}^k$. Для определенности в качестве x_i^* будем брать середину отрезка $[x_i, x_{i+1})$. По этим значениям и будем пытаться восстановить функцию.

Результаты обработки данных

В качестве исходных данных рассматривались данные переписей населения для разных государств. Сразу заметим, что в ряде случаев при подборе статистических данных по некоторым государствам возникают трудности, связанные с установлением того критерия, по которому тот или иной населенный пункт можно отнести к городу. Иногда населенные пункты разбиты на большое число видов и подвидов, из которых трудно выделить те, что можно назвать городами. В таких случаях авторы брали на рассмотрение все населенные пункты с достаточно большим населением, чтобы можно было предположить функционирование этого населенного пункта как города. Сразу же оговоримся, что в таких спорных случаях рассмотрение другой выборки не сказывается качественно на форме полученной ниже зависимости, а лишь слегка корректирует набор получаемых оптимальных параметров.

Для примера рассмотрим данные переписи населения Канады за 2006 г. (www.statcan.gc.ca). При выборе статистических данных рассматривались населенные пункты численностью не менее 1500 человек. На

Рис. 1 приведены значения $-\ln\left(\frac{n_i}{N\Delta_i}\right)$ в выбранных точках x_i^* . Видно,

что полученная совокупность точек на графике имеет вид, близкий к степенной зависимости. Такое предположение было высказано в (Слука 2005) при исследовании российских городов. Поэтому функцию f будем искать в виде:

$$f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha, \quad (4)$$

где $0 < \alpha < 1$, $C > 0$. Проведенные исследования показали, что наилучшим образом точки ложатся на степенную кривую при значениях $\alpha \approx 0,127$, $C \approx 3,355$.

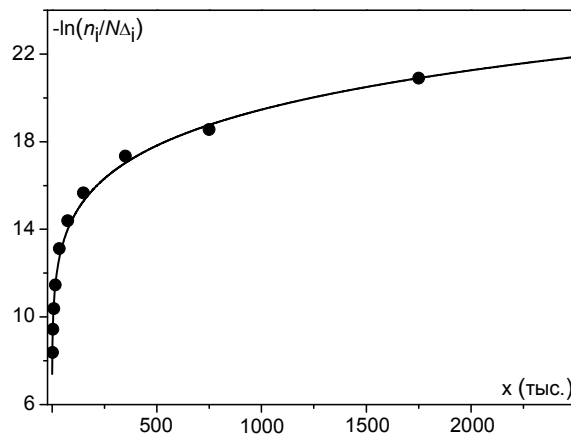


Рис. 1. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,127$, $C \approx 3,355$. Точки на графике – данные переписи населения Канады, 2006 г.

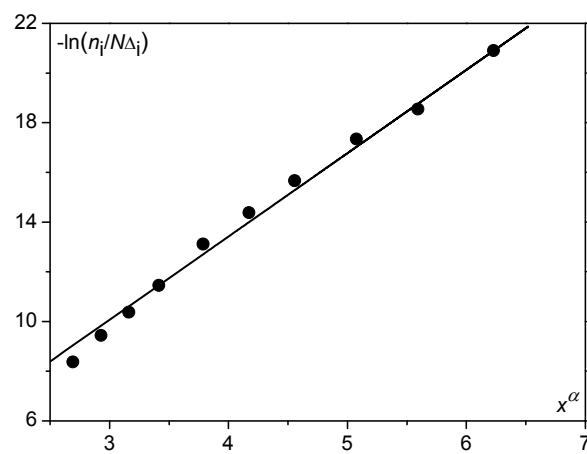


Рис. 2. График функции $f(z) = Cz$, где $z = x^\alpha$, $\alpha \approx 0,127$, $C \approx 3,355$. Точки на графике – данные переписи населения Канады, 2006 г.

Для наглядности полученного результата на Рис. 2 приведен график зависимости $-\ln\left(\frac{n_i}{N\Delta_i}\right)$ от $z = x^\alpha$. Видно, что точки действительно расположены в окрестности прямой $y = Cz$.

Еще раз заметим, что приведенные значения параметров не являются однозначно определенными; они зависят от выбора статистических данных, от способа разбиения диапазона x на промежутки, от выбора точек x_i^* , однако в любом случае лежат вблизи указанных значений.

На Рис. 3 приведен вид функции распределения $Ne^{-f(x,\bar{\alpha})}$. Для наглядности график показан в логарифмическом масштабе по оси y .

Пунктирными линиями на рисунке отмечено разбиение на промежутки $[x_i, x_{i+1})$ за исключением близких к нулю интервалов значений x , которые не могут быть наглядно отображены в данном масштабе.

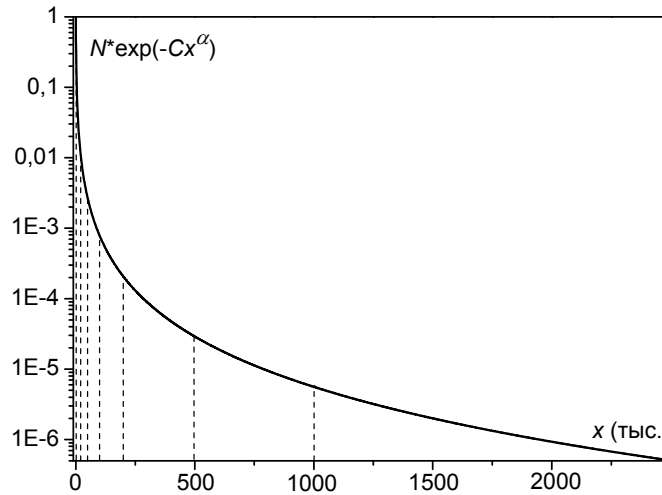


Рис. 3. График функции $Ne^{-f(x,\alpha)}$. Пунктирные линии – разбиение на интервалы по численности

На Рис. 4 представлено сравнение реального распределения городов по численности с распределением, полученным в модели.

Сплошные линии на диаграмме соответствуют имеющимся значениям

$$\frac{n_i}{\Delta_i}, \text{ а пунктирные – полученным из расчетов значениям } \frac{N}{\Delta_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta_i} n(x, \bar{\alpha}) dx.$$

Соответственно число городов – реальное (n_i) и полученное из расчетов ($I_i = N \int_{x_i}^{x_i + \Delta_i} n(x, \bar{\alpha}) dx$) – представляет собой соответствующие площади на диаграмме.

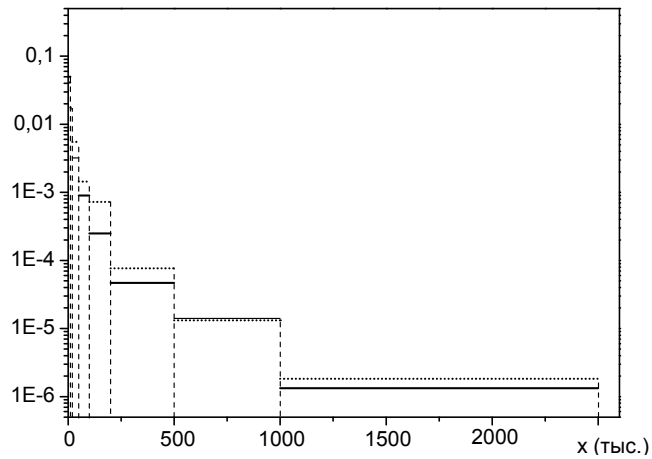


Рис. 4. Распределение городов Канады по численности (2006 г.). Сплошная линия – исходные данные, пунктирные – результат расчетов

Сделаем следующее замечание. Пусть при подборе степенной функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$ относительная погрешность аппроксимации в некоторой точке x_i^* составляет ε . Тогда отношение интегралов будет составлять $\frac{n_i}{I_i} = e^{\pm f\varepsilon}$. Это означает, что в случае сильной флуктуации предполагаемая и реальная численность могут в ряде случаев существенно различаться.

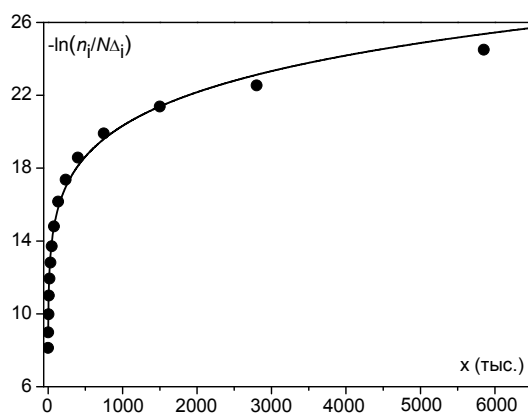


Рис. 5. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,591$. Точки на графике – данные переписи населения США, 2000 г.

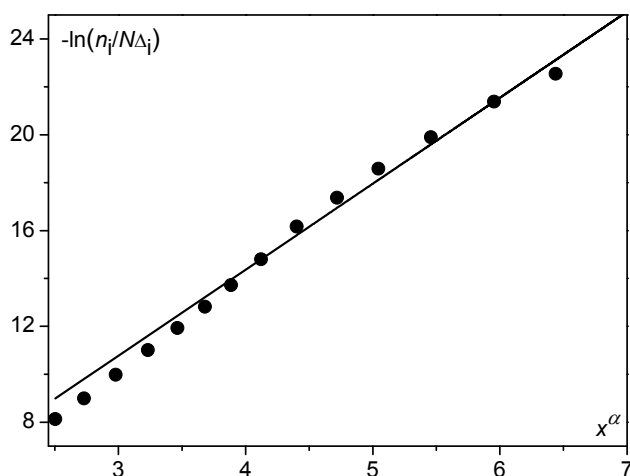


Рис. 6. График функции $f(z) = Cz$, где $z = x^\alpha$, $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,591$. Точки на графике – данные переписи населения США, 2000 г.

Аналогичные исследования, проведенные на основе статистических данных для других государств, показали, что полученная зависимость имеет достаточно универсальный характер. Для сравнения приведем еще ряд расчетов.

На Рис. 5 и 6 показаны результаты расчетов, сделанных на основе переписи населения США за 2000 г. (www.census.gov). Численность рассматриваемых населенных пунктов не менее 1000 человек.

Как видно из рисунков, мы имеем тот же вид зависимости: $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$. Более того, значения параметров, при которых точки хорошо ложатся на график, а именно $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,591$, получились близкими к тем, которые были подобраны для городов Канады (см. выше).

Следующий пример расчетов – города России. Здесь надо сделать оговорки, связанные с тем, какие населенные пункты рассматривались при выполнении расчетов. В отличие от рассмотренных выше государств, для которых характерно огромное количество малых по величине объектов (имеющих тем не менее статус города), в России малых по численности городов сравнительно небольшое число; эту нишу во многом занимают так называемые поселки городского типа, села и т. д. Заметим, что численность ряда поселков городского типа (например, крупных станций на юге России) может при этом намного превышать людность многих городов. Вероятно, населенные пункты с разным статусом, даже сравнительно большие, имеют ряд специфических отличий в функционировании и жизнедеятельности, которые заставляют отнести их к разным категориям. В любом случае это является предметом отдельного обсуждения и выходит за рамки данной работы. Авторами рассматривались статистические данные только по населенным пунктам, официально именуемым городами, и с численностью более 8000 человек. Города с меньшим количеством населения ввиду своей крайней немногочисленности не «укладываются» в общую зависимость.

На Рис. 7 и 8 приведены результаты расчетов, выполненных на основе переписи населения России за 2006 г. (по данным www.scb.se). Подобраные параметры имеют значения $\alpha \approx 0,123$, $C \approx 3,1726$.

Как видим, параметры близки по значениям к полученным ранее для других государств.

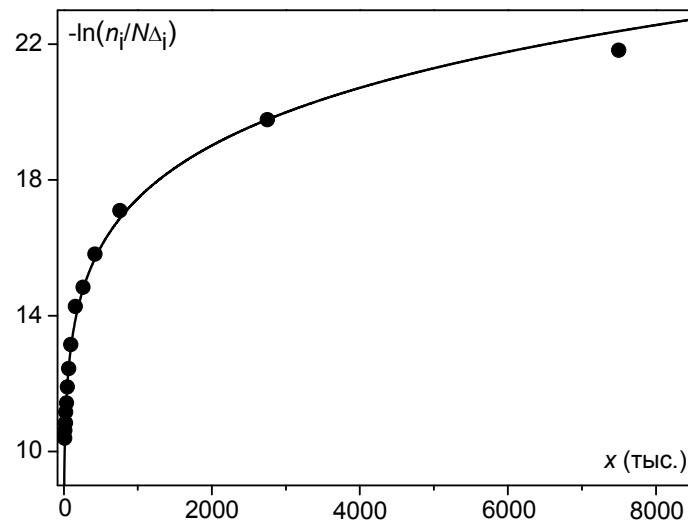


Рис. 7. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,123$, $C \approx 3,1726$. Точки на графике – данные переписи населения России, 2006 г.

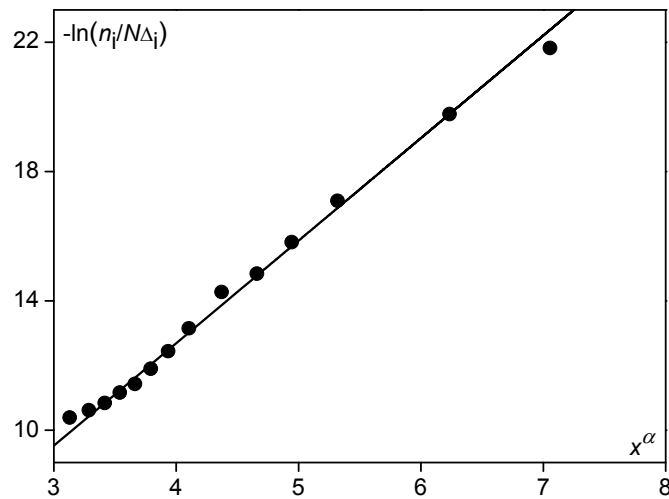


Рис. 8. График функции $f(z) = Cz$, где $z = x^\alpha$, $\alpha \approx 0,123$, $C \approx 3,1726$. Точки на графике – данные переписи населения России, 2006 г.

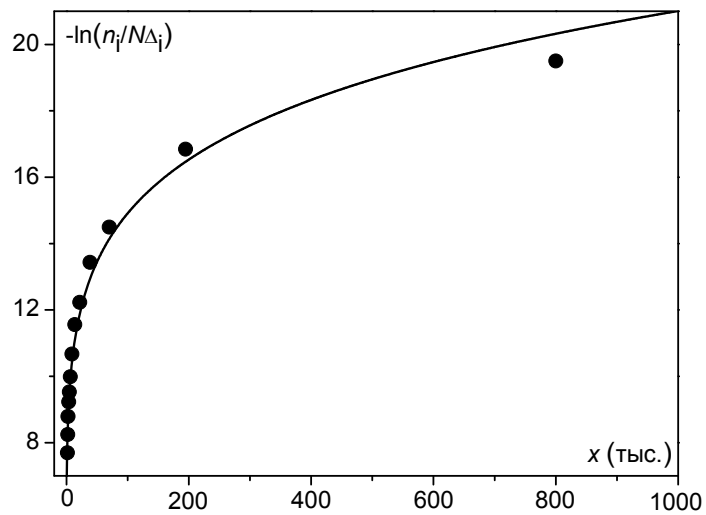


Рис. 9. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,149$, $C \approx 2,6819$. Точки на графике – данные переписи населения Швеции, 2006 г.

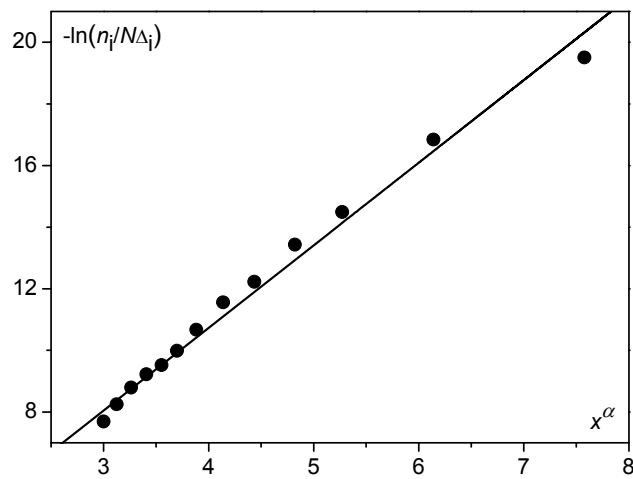


Рис. 10. График функции $f(z) = Cz$, где $z = x^\alpha$, $\alpha \approx 0,146$, $C \approx 2,6819$. Точки на графике – данные переписи населения Швеции, 2006 г.

Все рассмотренные выше примеры касались больших по территории и населению государств. Расчеты также проводились и для небольших европейских государств, имеющих совершенно другие масштабы как по размеру, так и по численности.

Для сравнения приведем результаты расчетов, сделанных для городов Швеции (www.scb.se) (см. Рис. 9 и 10). Здесь значения параметров несколько больше отличаются от тех, которые получены в предыдущих случаях: $\alpha \approx 0,149$, $C \approx 2,6819$.

Другой пример европейского государства – Испания (см. Рис. 11 и 12). Рассматривались данные переписи населения за 2001 г. по населенным пунктам численностью свыше 1000 человек (www.ine.es). Как и в предыдущих случаях, оптимальные значения параметров, при которых статистические данные хорошо описываются зависимостью (4), лежат в ожидаемом диапазоне значений и составляют $\alpha \approx 0,133$, $C \approx 3,24$.

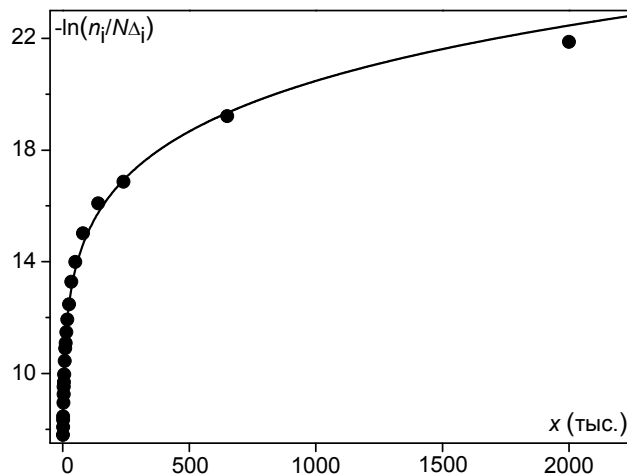


Рис. 11. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,133$, $C \approx 3,24$. Точки на графике – данные переписи населения Испании, 2001 г.

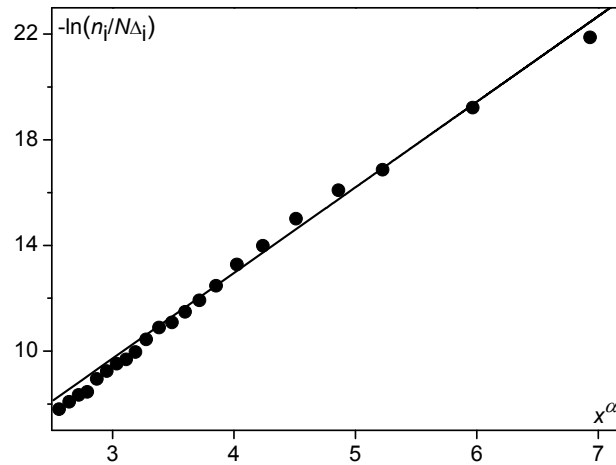


Рис. 12. График функции $f(z)=Cz$, где $z=x^\alpha$, $\alpha \approx 0,133$, $C \approx 3,24$. Точки на графике – данные переписи населения Испании, 2001 г.

В работе был также проведен анализ изменения распределения городов во времени в рамках одного и того же государства. Для примера приводятся результаты расчетов, выполненные для городов России на основе данных переписей 1959, 1970, 1989 и 2006 гг. (Рис. 13). Значения параметров, полученных для каждого случая, отличаются очень незначительно: $\alpha \approx 0,127$, $C \approx 3,1541$ (1959 г.); $\alpha \approx 0,119$, $C \approx 3,394$ (1970 г.); $\alpha \approx 0,130$, $C \approx 2,9193$ (1989 г.); $\alpha \approx 0,123$, $C \approx 3,1726$ (2006 г.).

Приведенные выше результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что зависимость числа городов от численности их населения в рамках любого региона или государства может быть описана одной и той же функцией распределения $n(x, \alpha) = e^{-f(x, \alpha)}$, где $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$. Более того, диапазон значений параметров, характеризующих соответствующую функцию, можно с большой степенью вероятности спрогнозировать как $\alpha \approx 0,12 \div 0,15$, $C \approx 2,5 \div 3,5$. При этом данный диапазон значений является характерным не только для последних лет, но, по всей видимости, и для последних десятилетий.

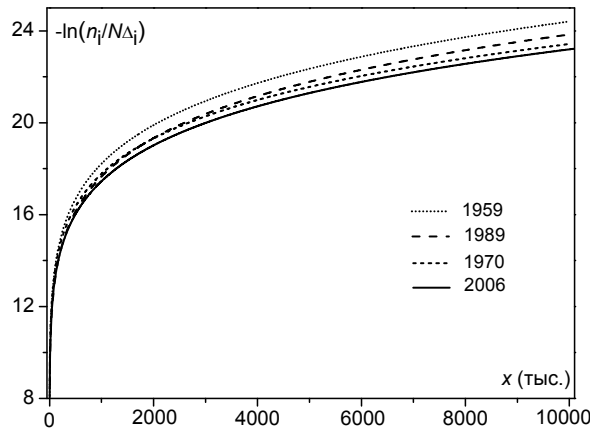


Рис. 13. Графики функций вида $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, построенных на основе данных переписей населения России за 1959, 1970, 1989 и 2006 гг.

Ранговая модель распределения городов

Рассмотрим теперь ранговую модель распределения городов. Правило «ранг – размер» широко используется в экономико-географических исследованиях, поскольку во многих случаях хорошо описывает распределение населения в реальных городских системах. Впервые оно было установлено в 1913 г. Ф. Ауэрбахом; затем в 30-х гг. американский социолог Дж. К. Ципф, исходя из экономической целесообразности, попытался дать объяснение этому феномену. Работы Ципфа получили существенно больший резонанс, и правилу «ранг – размер» было присвоено его имя.

Для его формулировки используют ранжированный (то есть упорядоченный по убыванию) ряд численностей населения городов, входящих в систему, как функцию ранга. Закон Ципфа утверждает, что в различных системах городов (в глобальной системе городов мира, в системах городов крупных стран и регионов) численность r -го по величине города может быть оценена так:

$$x_r \approx \frac{N_0}{r^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad r = 1, 2, \dots, R, \tag{5}$$

где N_0 и γ – константы, свои для каждой системы городов. В двойной логарифмической шкале график зависимости (5) представляет собой прямую линию:

$$\lg(x_r) = \lg(N_0) - \gamma \lg r. \tag{6}$$

Многими исследователями отмечено, что на прямую закона Ципфа (6) хорошо ложатся средние и малые города, а для нескольких больших городов наблюдается отклонение от этого закона.

Для примера приведем вид зависимости типа «ранг – размер» для рассмотренных выше государств. На Рис. 14 в двойном логарифмическом масштабе отмечены города США. Видно, что крупные и средние города (с населением более 10 000 человек) хорошо ложатся на прямую.

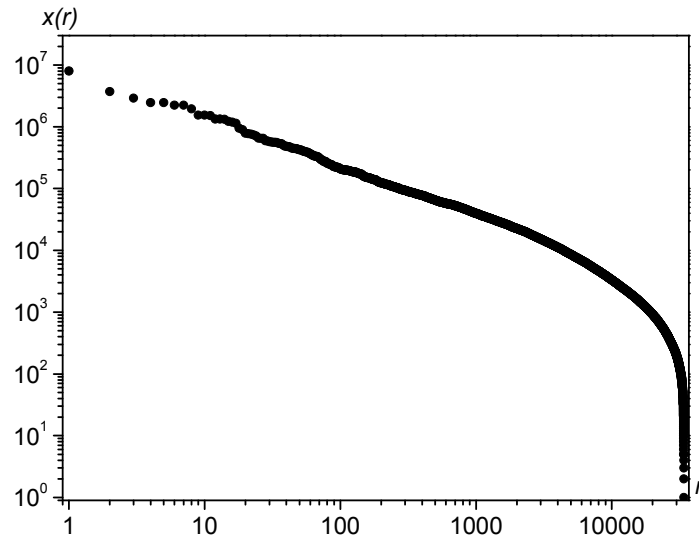


Рис. 14. Ранжированный ряд численностей населения городов США в двойном логарифмическом масштабе (по данным переписи 2000 г.)

На Рис. 15 приведен соответствующий фрагмент ранжированного множества городов и прямая, вблизи которой они расположены. Проведенные расчеты показали, что она описывается параметрами $\beta \approx 0,761$, $N_0 \approx 7,514 \times 10^6$.

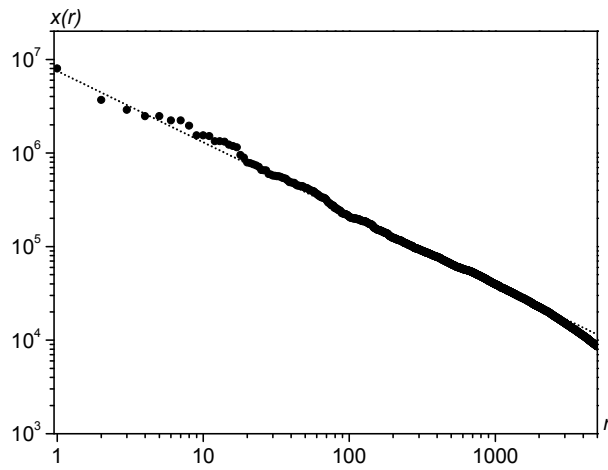


Рис. 15. Фрагмент ранжированного ряда городов США численностью более 10 000 чел. и прямая вида $\lg(x_r) = \lg(N_0) - \gamma \lg r$, где $\gamma \approx 0,761$, $N_0 \approx 7,514 \times 10^6$

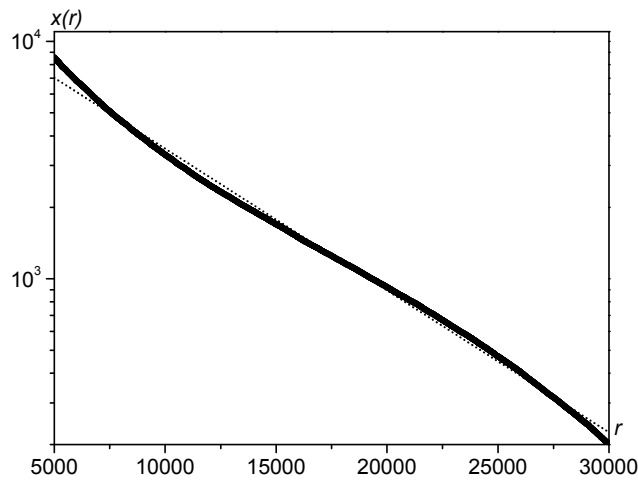


Рис. 16. Фрагмент ранжированного ряда городов США численностью менее 10 000 чел. и прямая вида $\lg(x_r) = \lg(\tilde{N}_0) - \tilde{\gamma} r$, где $\tilde{\gamma} \approx 5,974 \times 10^{-5}$, $\tilde{N}_0 \approx 13977$

Однако специфика данного государства состоит в наличии огромного числа небольших и малых городов, которые, как мы видим, не укладываются в эту закономерность. В работе (Гусейн-Заде 1988) была предложена несколько видоизмененная модель, описывающая распределение малых городов. Исследования показали, что оставшаяся часть городов США может быть достаточно успешно описана этой зависимостью, а именно:

$$\lg(x_r) = \lg(\tilde{N}_0) - \tilde{\gamma}r. \quad (7)$$

Таким образом, эти города также ложатся на прямую, но только в других координатах. Это наглядно продемонстрировано на Рис. 16. Значения параметров равны: $\tilde{\gamma} \approx 5.974 \times 10^{-5}$, $N_0 \approx 13977$.

Аналогично построим зависимость вида «ранг – размер» для городов России. На Рис. 17 в двойном логарифмическом масштабе отмечены города, а также прямая вида (6). Параметры полученной зависимости в данном случае имеют значения: $\beta \approx 1,094$, $N_0 \approx 2,416 \times 10^7$.

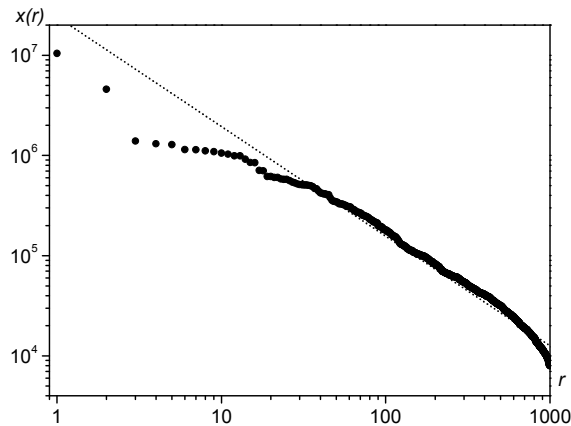


Рис. 17. Ранжированный ряд численностей городов России (по данным переписи 2006 г.) и прямая вида $\lg(x_r) = \lg(N_0) - \gamma \lg r$, где $\gamma \approx 1,094$, $N_0 \approx 2,416 \times 10^7$

Исследования показали, что для каждого государства есть взаимно-однозначное соответствие между зависимостью вида «ранг– размер» и функцией распределения городов. В качестве примера рассмотрим вместо упорядоченного по численности списка городов США полученный по формуле (5) набор значений $\{x_r\}$. Применяя описанную ранее методику (см. выше), построим функцию распределения городов по численности. Результаты приведены на Рис. 18 и 19. Значения параметров $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,6613$, что практически совпадает с ранее полученными значениями.

Небольшой «скачок» на графике (см. Рис. 19) связан с незначительным разрывом в значениях $\{x_r\}$ при переходе от зависимости вида (6) к зависимости вида (7).

Аналогично восстановим функцию распределения городов России, исходя из имеющейся зависимости типа «ранг – размер». Результаты приведены на Рис. 20 и 21. Здесь $\alpha \approx 0,1251$, $C \approx 3,1685$.

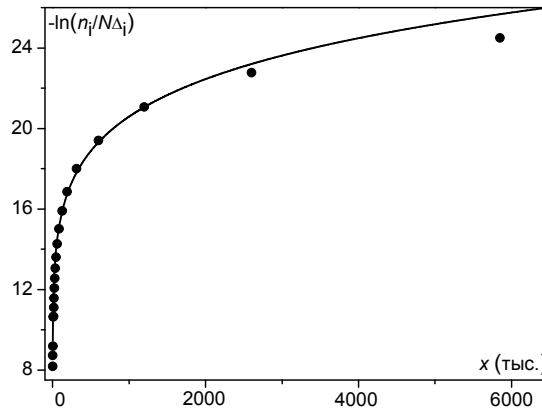


Рис. 18. График функции $f(x,C,\alpha)=Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,6613$. Точки на графике – результаты расчетов по формуле «ранг – размер» с параметрами для городов США

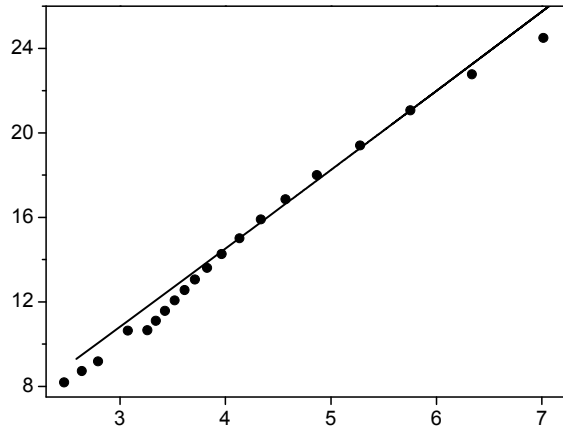


Рис. 19. График функции $f(z)=Cz$, где $z=x^\alpha$, $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3,6613$. Точки на графике – результаты расчетов по формуле «ранг – размер» с параметрами для городов США

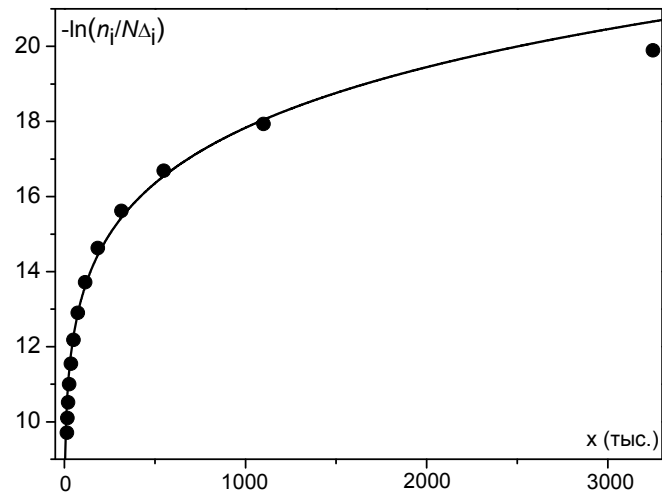


Рис. 20. График функции $f(x, C, \alpha) = Cx^\alpha$, $\alpha \approx 0,1251$, $C \approx 3,1685$. Точки на графике – результаты расчетов по формуле «ранг – размер» с параметрами для городов России

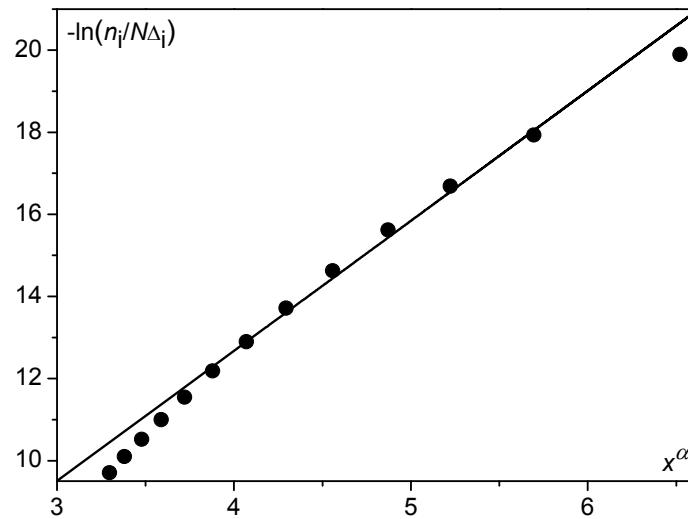


Рис. 21. График функции $f(z) = Cz$, где $z = x^\alpha$, $\alpha \approx 0,1251$, $C \approx 3,1685$. Точки на графике – результаты расчетов по формуле «ранг – размер» с параметрами для городов России

Таким образом, возможен переход от одного вида зависимости к другому. В свою очередь, как будет описано ниже, распределение «ранг – размер» может быть получено как решение системы нелинейных уравнений теплопроводности с источником.

Математическая модель связанной системы городов

В работе (Дмитриев и др. 2010: 61–78) была построена математическая модель роста и взаимодействия городов, объясняющая формирование распределения «ранг – размер» с течением времени. В качестве основного параметра порядка рассматривалась численность города, отражающая уровень развития города и качество предоставляемых им услуг. Очевидно, что чем крупнее город, тем больше жители города имеют возможность получить хорошее образование, устроиться на высокооплачиваемую работу и т. д., то есть тем он привлекательнее для мигрантов. С другой стороны, в больших городах существует большое количество специфических проблем (транспортных, жилищных, экологических и др.), вызывающих отток населения. В результате действия этих двух главных факторов формируется иерархическая система, в которой все города выстраиваются в цепочку.

Математическая модель, описывающая изменение численности города, представляет собой нелинейное уравнение теплопроводности, в котором нелинейный объемный источник моделирует прирост населения города за счет рождаемости и притока мигрантов, а нелинейная диффузия описывает факторы оттока населения из города. Заметим, поскольку прирост населения только за счет рождаемости описывается линейным источником, именно нелинейность описывает факторы роста города за счет приезжих.

Итак, рассматривается дискретная система городов. Все города занумерованы по убыванию численности их населения. Так, $u_1(t)$ – численность первого города, $u_r(t)$ – численность r -го города в момент времени t , где r – это номер в списке, или ранг города. При этом $u_{r+1} \leq u_r$. Предполагается, что скорость изменения численности каждого города $u_r(t)$ описывается ОДУ:

$$\frac{du_r}{dt} = W_r + q_0 u_r^\beta, \quad r=1, 2, \dots, R, \quad (8)$$

где $W_r = \frac{d_0}{\sigma+1} (u_{r+1}^{\sigma+1} - 2u_r^{\sigma+1} + u_{r-1}^{\sigma+1}), \quad r=2, 3, \dots, R-1, \quad (9)$

$$W_1 = \frac{d_0}{\sigma+1}(u_2^{\sigma+1} - u_1^{\sigma+1}), \quad W_R = \frac{d_0}{\sigma+1}(-u_R^{\sigma+1} + u_{R-1}^{\sigma+1}). \quad (10)$$

Фактически W является разностным аналогом дифференциального оператора диффузии на сетке с шагом 1, а член $q_0 u^\beta$ играет роль объемного источника.

В некоторый момент времени в прошлом зададим начальное распределение:

$$u(r, t_0) = u_0(r). \quad (11)$$

Систему уравнений (8)–(11) можно рассматривать как разностный метод решения задачи для одномерного нелинейного уравнения теплопроводности относительно плотности распределения населения $u(r, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q_0 u^\beta. \quad (12)$$

Решения нелинейного уравнения теплопроводности (12) хорошо известны (Самарский и др. 1987). Это уравнение интенсивно изучалось, начиная с 70-х гг. прошлого века в связи с исследованием процессов термоядерного горения в плазме. Было показано, что с течением времени решения, отвечающие произвольным начальным данным (11), стремятся к автомодельным решениям уравнения (12). Другими словами, автомодельные решения играют роль аттракторов и описывают все типы возможных режимов развития начальных данных на асимптотической стадии. Тип автомодельного режима зависит от соотношения между параметрами β и σ . Было показано (Дмитриев и др. 2010: 61–78), что параметры модели должны лежать в диапазонах $0 < \sigma < 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$, что соответствует так называемому *LS*-режиму с обострением.

В этом случае соответствующая автомодельная задача имеет единственную структурно устойчивую собственную функцию. Автомодельное решение уравнения (12), соответствующее этой СФ, обладает рядом свойств, качественно описывающих динамику развития системы городов. В частности, имеет место следующее предельное распределение при $t \rightarrow \tau$ (Самарский и др. 1987):

$$u(r, t) \xrightarrow{t \rightarrow \tau} C r^{-p}, \quad (13)$$

которое соответствует распределению «ранг – размер». Чем ближе время к моменту обострения τ , тем ближе «прижимается» решение $u(r, t)$ к предельному асимптотическому распределению (13).

В работе (Дмитриев и др. 2010) показано, что и решения $u_r(t)$, $r=1, \dots, R$ системы ОДУ (8)–(10) для городов будут обладать аналогичными свойствами. Действительно, произведенные расчеты для разных значений параметров и разных начальных распределений показали, что с достаточно произвольного начального распределения (11) система со временем стремится к распределению «ранг – размер». Зависимость «ранг – размер» наблюдается для большинства городов, отклонения имеются для самых крупных и малых городов, что качественно описывает наблюдаемые закономерности.

Заключение

В работе рассмотрены вероятностная и ранговая модели, описывающие распределения совокупности городов по их численности. Приведены результаты обработки ряда переписей населения для различных государств. Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, зависимость числа городов от численности их населения в рамках любого региона или государства может быть описана одной и той же функцией распределения: $n(x, \bar{\alpha}) = e^{-f(x, \bar{\alpha})}$, где $f(x, \bar{\alpha}) = Cx^\alpha$. Более того, найден сравнительно узкий диапазон параметров, характеризующих функцию f , которые удовлетворяют всем рассмотренным данным, а именно: значения параметров лежат вблизи $\alpha \approx 0,125$, $C \approx 3$. Во-вторых, показано, что функция распределения, в свою очередь, взаимно однозначно связана с зависимостью типа «ранг – размер» $x_r \approx \frac{N_0}{r^\gamma}$, описывающей ранжированный ряд численностей городов как функцию ранга. Предложена несколько видоизмененная зависимость, более приспособленная для государств с большим количеством малых городов. Описан переход к математической модели взаимодействия городов, объясняющей формирование распределения вида «ранг – размер» с течением времени. В основе модели лежит нелинейное уравнение теплопроводности с источником.

Библиография

- Гринин Л. Е., Коротаев А. В. 2009. *Социальная макроэволюция. Генезис и трансформации Мир-Системы*. М.: ЛИБРОКОМ.
- Гусейн-Заде С. М. 1988. *Модели размещения населения и населенных пунктов*. М.: Изд-во МГУ.

- Дмитриев В. И., Куркина Е. С., Симакова, О. Е. 2010. Математические модели анализа роста городов. *Прикладная математика и информатика* 34: 61–78.
- Подлазов А. В. 2009. Закон Ципфа и модели конкурентного роста. *Нелинейность в современном естествознании* / Ред. Г. Г. Малинецкий, В. П. Маслов, с. 229–256. М.: ЛИБРОКОМ.
- Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. 1987. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*. М.: Наука.
- Слука Н. А. 2005. *Градоцентрическая модель мирового хозяйства*. М.: Пресс-Соло.