ТЕОРИЯ ПОЗНАНИЯ

И. С. КАРАМЫШЕВ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ КАК ФИЛОСОФСКОЕ СОБЫТИЕ

Тот факт, что теория множеств Кантора является одним из ключевых событий в истории математики, не вызывает сомнений. В статье показано, что столь же значимым результатом она стала и для философии. Со времени своего возникновения в конце XIX в. и вплоть до наших дней теория множеств оказывала и продолжает оказывать значительное влияние на создание и развитие ключевых направлений философской мысли. На примере таких разных философов, как Э. Гуссерль, П. А. Флоренский и А. Бадью, в статье показано непосредственное терминологическое и идейное влияние на них теории множеств. Отмечено, что и философские течения, не принимавшие канторовских установок, находились в рамках заданной им повестки. Кроме того, в статье отмечены ключевые события в истории математики и философии, приведшие к созданию теории множеств. Особенное внимание уделено проблеме существования актуальной бесконечности и вопросу обоснования математики. Отдельно рассмотрен вопрос о критике применения математических ресурсов в философии.

Ключевые слова: *теория множеств, событие, математика, актуальная бесконечность, онтология, универсальная онтология, Г. Кантор, Э. Гуссерль, К. Гёдель, П. А. Флоренский, А. Бадью.*

The fact that Cantor's set theory is one of the key events in the history of mathematics is unquestionable. The article shows that it has also become a significant result for philosophy. Since its inception in the late nineteenth century and up to the present day, set theory has and continues to have an impact on the creation and development of key areas of philosophical thought. On the example of such different philosophers as Husserl, Florensky and Badiou, the article shows the direct terminological and ideological influence of set theory on them. It is noted that the philosophical currents that did not accept Cantor's guidelines were within the framework of the agenda set by him.

Философия и общество, № 4 2017 117–133

In addition, the article highlights key events in the history of mathematics and philosophy that led to the creation of set theory. Particular attention is paid to the problem of the existence of actual infinity and the problem of substantiating mathematics. The author considered the issue of criticism of the application of mathematical resources in philosophy.

Keywords: *set theory, event, mathematics, actual infinity, ontology, universal ontology, Cantor, Husserl, Gödel, Florensky, Badiou.*

Введение

«Метафизика и математика по праву должны находиться во взаимосвязи, – говорил Г. Кантор, – в периоды их решающих успехов они находятся в братском единении» [Кантор 1985: 246]. Созданная автором этих слов теория множеств стала таким решающим успехом. Основные пути развития философии и математики не прошли мимо канторовской теории. Она актуализировала старые вопросы и, освежив и обогатив новыми результатами, подняла их на качественно иной уровень.

1. Проблема бесконечности и теория множеств

Со времени возникновения в VI–V вв. до Рождества Христова математики как теоретической науки наибольшие трудности в ней были связаны с понятием бесконечности. Мнение Аристотеля, что актуальной бесконечности не существует, что она не нужна математике, поддерживалось многовековой традицией. Г. Галилей и Г. Лейбниц, К. Гаусс и Н. И. Лобачевский, Ж. Лагранж и О. Коши исключали актуальную бесконечность из рассмотрения. Такой подход, несмотря на эффективность практического применения математики и на все более внушительные темпы, с которыми строилось здание математической науки, не позволял поставить это величественное здание на надежный фундамент.

Долгое время абсолютно надежным разделом математики считалась геометрия. Именно с нее начал свои «Начала» Евклид, подчеркнув тем самым, вслед за Платоном и Аристотелем, значение именно этой дисциплины. В течение двух следующих тысячелетий геометрия продолжала считаться самым надежным разделом математики. «Все, что выходит за рамки геометрии, выходит за рамки нашего понимания» [Клайн 2007б: 312], – говорил Б. Паскаль. Б. Спиноза написал свою «Этику» по лекалам «Начал», И. Ньютон, подражая Евклиду, изложил механику в «Математических началах натуральной философии», а И. Кант в «Критике чистого разума» говорил о геометрии как об априорном знании и о необходимости применения в философии не выходящей из своих границ математики.

Различие между наукой о количестве (арифметикой) и наукой о величине (геометрией), введенное Платоном в «Государстве», существовало, по словам Прокла, уже у пифагорейцев. И если в геометрии вплоть до появления результатов Н. И. Лобачевского не возникало никаких проблем, то в арифметике были сложности, связанные с существованием иррациональных чисел, существованием арифметического аналога геометрической величины, получаемой при попытке измерения диагонали квадрата с заданной стороной. Пифагорейцы хранили в тайне знание об арифметической несоизмеримости геометрических величин, и даже в конце XIX в. Л. Кронекер не принимал иррациональные числа, говоря, что «целые числа создал Бог, а все остальное есть творение человека» [Френкель, Бар-Хиллел 1966: 293]. Те же, кто принимают в рассмотрение иррациональные числа, называют их квадратным корнем из соответствующей величины, но «даже “конечные” иррациональные числа, – говорит Г. Кантор, – нельзя обосновать с научной строгостью без решительного привлечения к делу актуально бесконечных множеств» [Кантор 1985: 273].

Р. Декарт путем введения системы координат сделал значительный шаг в направлении установления соответствия между двумя разделами математики и создания единой универсальной математической теории, которая должна была стать столь же надежной, какой оставалась в течение долгого времени геометрия. Однако в 1820-е гг. Лобачевский установил, что геометрия Евклида не является ни априорным, ни абсолютным знанием. Он показал, что требование пятого постулата, отличавшегося от остальных не только своей необычной формой, но и присутствием в формулировке понятия бесконечности, независимо от прочих постулатов и общих положений (переименованных традицией в аксиомы) системы и, следовательно, может быть заменено альтернативной установкой.

Очередная актуализация вопроса о том, как работать с бесконечностями, была вызвана использованием бесконечно малых величин в дифференциальных и интегральных исчислениях. В попытках строгого обоснования анализа бесконечно малых О. Л. Коши ввел в качестве основополагающего понятия предел, а К. Вейерштрасс предложил классическое определение этого понятия на языке эпсилон-дельта. Опасность такого обоснования заключалась в том, что в определении предела использовалось понятие бесконечности (католик Коши говорил только о потенциальной бесконечности, оставляя актуальную бесконечность как исключительный атрибут Бога). Итак, математика нуждалась в теории, определяющей и описывающей работу с бесконечностями. Решая эту проблему, математики вынуждены были выйти за пределы своих специальных исследований и отправиться в поисках ответов на поля философии.

Поставленный Платоном вопрос о количественности сущего был продолжен неоплатонической традицией, пытавшейся мыслить сущее исключительно в терминах единого и многого. Положение, что сущее едино, а не множественно или ничтойно, доказывалось Проклом от противного. Из множественности сущего следует составленность всех его элементов из бесконечно многих бесконечностей, превосходящих, таким образом, бесконечность, а из ничтойности – ничтойность элементов и любых их комбинаций. Прокл считал оба вывода невозможными, что и опровергало предположения о множественности или ничтойности сущего. Единое у неоплатоников не отождествляется с сущим, но становится универсальным онтологическим принципом, из которого происходит все сущее.

Оба положения, отринутые Проклом как абсурдные, были приняты Кантором, сформулировавшим и доказавшим основные результаты теории множеств. Им было введено понятие пустого множества, определяемого как не содержащее ни одного элемента. Из других определений теории следовало, что пустое множество единственно и что оно является элементом любого множества. Более того, поименованная пустота, имеющая нулевую мощность, порождала множества любой мощности. Таким образом, ничтойность порождала и единое, и множественное, и бесконечное. «Бесконечно многие бесконечности» тоже были приняты Кантором, проблемная ситуация разрешалась посредством введения кардинальных чисел, ранжирующих бесконечности согласно соответствующим им мощностям.

Прокловское понимание бесконечной величины за сто лет до Г. Кантора отвергает в «Критике чистого разума» И. Кант. В примечании к тезису первой антиномии («Мир имеет начало во времени и ограничен также в пространстве» [Кант 2008: 274]) он пишет: «Я бы мог дать также и мнимое доказательство тезиса, исходя из ошибочного понятия бесконечности данной величины, как это обычно делают догматики. Бесконечна та величина, больше которой (то есть больше определенного множества содержащихся в ней данных единиц) невозможна никакая другая величина. Но никакое множество не может быть наибольшим, так как ко всякому множеству можно прибавить еще одну или несколько единиц. Следовательно, невозможна никакая бесконечная данная величина» [Там же: 276]. Кант не создал положительного учения о бесконечности, остановившись возле границы, за пределами которой разум неминуемо впадает в антиномии.

Г. Кантор принял положение, что бесконечная величина может быть строго меньше некоторой другой величины, но не перешел отсюда к выводу о невозможности никакой бесконечной величины. Он работал с актуальными бесконечностями, которые мыслил как целокупные единства, а соответствующие их мощностям кардинальные числа сравнивал, складывал и перемножал. Каждое действительное число у Кантора представлялось бесконечным количеством символов, что позволяло в определенном смысле фиксировать и иррациональные числа. Принятие абсурдных, с точки зрения Прокла, положений привело к некоторым контринтуитивным результатам. Получалось, что множества натуральных, целых, рациональных чисел – равномощны. Также строго доказывалось взаимооднозначное соответствие между множествами точек прямой и некоторого интервала на ней.

Теория множеств отличалась предельной абстрактностью. Математика окончательно отрывалась от всяких связей с представлениями о реальности. Привычные арифметические или геометрические интерпретации становились лишь некоторыми из возможных моделей. Множество, ключевое для канторовской системы понятие, определялось им как совокупность элементов любой природы, мыслимая как единое целое. Помимо прочего, такое определение допускает возможность понимания самого множества как элемента, что приводит к самореференции, породившей позже знаменитые парадоксы.

2. Парадоксы теории множеств и попытки их преодоления

Первым на уязвимые места теории множеств указал сам И. Кантор, им был сформулирован парадокс, из которого следовало, что не существует максимального кардинального числа. Иными словами, среди бесконечных множеств не существует множества с максимальной мощностью. Таким образом, граница, перед которой остановился Кант, была передвинута на новый уровень абстракции, но по существу проблема бесконечности не была решена. Парадокс Кантора представляет собой переформулированные и процитированные выше слова Канта: «Никакое множество не может быть наибольшим».

Парадокс Цермело – Рассела, ставящий вопрос, содержит ли себя множество всех не содержащих себя множеств, вызвал и актуализировал дискуссию об онтологическом статусе множества. Так, поначалу в рамках математики, а позже и за ее пределами был возобновлен спор об универсалиях. Одни понимали множество как идеальную заданность, другие – как сконструированный концепт, третьи – как лишний и ненужный термин, а четвертые не видели общезначимой проблемы, говоря, что это внутренний вопрос математики.

В теории множеств Кантора [Френкель, Бар-Хиллел 1966], претендовавшей на окончательное и достаточно надежное основание математики, были выявлены парадоксальные, формально противоречивые положения, и это привело к тому, что с тех пор и по сей день не существует математики как единой науки. Логицисты попытались обосновать математику посредством логики, а сторонники теории типов – уйти от самореференции путем введения различия между отношениями множеств, принадлежащих различным классам.

Интуиционистское направление отказалось от работы с бесконечностями, принимая лишь конструктивные доказательства, отказываясь тем самым от значительной части математических результатов. Л. Брауэр, лидер этого направления, говорил, что математика – это внеязыковая деятельность ума [Brouwer 1912]. Лидер противоположного, формалистского, лагеря Д. Гильберт надеялся путем введения полной строго формальной аксиоматики сохранить статус-кво: «Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором» [Клайн 2007б: 351].

Ко времени создания теории множеств математика не только обогатилась, но и обезбожилась [Shaposhnikov 2016a]. «Бог Авраама, Исаака и Иакова» вышел из веков схоластики «Богом философов», опутанным сетями доказательств. И если Р. Декарт еще говорил, что «математические истины <...> установлены Богом и полностью от Него зависят» [Декарт 1989: 588], то Г. Лейбниц навесил на своего Бога бремя непротиворечивости. Далее, Богу было запрещено вмешиваться в созданный Им мир. И наконец, Бог оказался ненужным: П. Лапласу «эта гипотеза не потребовалась» [Клайн 2007б: 123]. Так «Бог философов» умер для большинства математиков, сказавших устами Гильберта, что «не нуждаются для обоснования математики в Господе Боге» [Там же: 425]. Следуя духу времени, Гильберт говорил не об открытии, а о конструировании человеком математических истин. Выведение следствий из математических утверждений он понимал как игру с символами по определенным правилам.

После выявления парадоксов в теории множеств Д. Гильберт выступил с программой создания полной и непротиворечивой, не нуждающейся во внешнем обосновании системы. Несмотря на усилия многих сильнейших математиков того времени, замысел Гильберта не был осуществлен. Ключевую роль здесь сыграли результаты К. Гёделя, которому удалось свести математику к арифметике натуральных чисел (каждому символу, каждой формуле и каждому доказательству в соответствие ставились некоторые натуральные числа) и, работая с формализованной таким образом математикой, доказать теорему о неполноте, согласно которой любая непротиворечивая формализованная система аксиом, где выразима арифметика натуральных чисел, является неполной. В доказательстве теоремы была показана необходимость существования утверждений, независимых от заданной системы аксиом. Наиболее ярким примером такого утверждения является континуум-гипотеза, занимающая первое место в предложенном Гильбертом списке из двадцати трех ключевых проблем, не решенных математиками к началу XX в. Невыводимость ее отрицания в аксиоматике Цермело – Френкеля была показана в 1940 г. К. Гёделем, а невыводимость ее утверждения – П. Коэном в 1963 г.

Теорема о неполноте, показавшая принципиальную неосуществимость проекта Гильберта, стала значительнейшим событием не только в математике, но и в философии. Сам Гёдель указывает на с необходимостью следующую из его теоремы дизъюнкцию, «представляющую огромный философский интерес» [Хинтикка 2014: 177]: «Либо математика незавершаема в том смысле, что ее очевидные аксиомы не могут быть охвачены конечным правилом, то есть, человеческий ум (даже в области чистой математики) бесконечно превосходит возможности любой конечной машины, или же существуют абсолютно неразрешимые математические утверждения, <...> [что], кажется, опровергает взгляд, что математика является нашим собственным творением» [Там же: 177, 180]. Первый член дизъюнкции, нанесший сильный удар по позициям господствующего в то время неопозитивизма, и по сей день является важным аргументом против сциентизма и механицизма. Второй член дизъюнкции – аргумент против конструктивизма (в смысле рукотворности математики, а не конструктивного характера доказательств в ней) и в защиту математического платонизма.

Дизъюнкция не исключает и возможности, что верны оба ее члена, она не допускает лишь предлагавшийся Гильбертом отказ от обоих. Взяв за основу положение, что человеческий ум бесконечно превосходит возможности любой конечной машины, Гёдель задается вопросом, на каком другом более высоком уровне возможно установить основание интерсубъективности, на чем можно строить фундамент для будущей универсальной науки. «Сегодня существуют на самом деле зачатки науки, которая претендует на систематический метод такого прояснения значения, и это феноменология, основанная Гуссерлем» [Там же: 208], – пишет Гёдель.

3. Теория множеств и феноменология Гуссерля

Э. Гуссерль берется за построение строгой науки, имеющей дело с универсальным сознанием. Говоря о феноменологии как об «универсальной конкретной онтологии» и о «тотальной науке A priori» [Гуссерль 2010: 10], он пытается основать ее на трансцендентальной интерсубъективности, предшествующей всякой объективности и утверждающей ее. Гуссерль отказывается от математизации и аксиоматизации в стиле Декарта: «В философии невозможно определять так, как в математике; любое подражание математическим приемам в этом отношении не только бесплодно, но и превратно и влечет за собой лишь самые вредные последствия» [Гуссерль 2009: 24]. «Трансцендентальная феноменология принадлежит к совершенно иному фундаментальному классу эйдетических наук, нежели науки математические» [Там же: 224], – продолжает Гуссерль. Впрочем, к заключению в скобки математики он приступает в самом конце, после выключения чистого Я и трансцендентального Бога, решаясь на это, лишь взяв предварительно из математических теорий и сохранив некоторые необходимые всеобщие и абсолютные положения.

«Весь мир как факт подпадает под выключение, но только не мир как эйдос и не какая-либо иная сущностная сфера» [Там же: 102]. «Если мир выключается, то это действительно не означает, что выключается натуральный ряд чисел и относящаяся к нему арифметика» [Там же]. «Реальность можно охарактеризовать лишь косвенно, аналогически, посредством математических понятий» [Там же: 159], сохраненных в «феноменологическом остатке, незатронутом феноменологическим выключением» [Там же: 104]. И логику, и математику Гуссерль называет «чистыми науками о сущностях» [Там же: 42], говоря о математизации как о «практическом идеале точной эйдетической науки» [Там же: 44]. Выстраивая формальную онтологию, он занимается именно генерализацией, а не формализацией: «Формальная онтология скрывает в себе формы всех возможных онтологий вообще <...> предписывает всем материальным онтологиям общую для всех них формальную устроенность» [Там же: 49].

Э. Гуссерль, как и К. Гёдель, был платонистом и, считая и числа, и геометрические фигуры объектами мира идей, утверждал, что «слепота к идеям – нечто вроде душевной слепоты <...> на деле же все и, так сказать, беспрерывно, видят “идеи” и “сущности”, оперируют ими в своем мышлении, осуществляют суждения относительно сущностей» [Там же: 76]. Гуссерль говорил об арифметическом мире и об арифметической установке, о том, что «любая формальная сущность наделена своим формальным, или “математическим” объемом» [Там же: 57]. В феноменологии, как и в геометрии (в поздних работах Гуссерль отдельно занимался вопросом о происхождении геометрии), речь идет о сущности или о существовании в возможности, но не о существовании в действительности.

В «Философии арифметики» [Husserl 2003], вышедшей в 1891 г., Гуссерль называет своего друга и коллегу Г. Кантора гениальным математиком и цитирует опубликованную в 1883 г. работу «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечности». В этой работе Кантор, чьи математические исследования всегда были тесно связаны с философией, пишет: «Под многообразием, или множеством, я понимаю именно то любое многое, которое можно трактовать как нечто одно, то есть всякое целостное понятие определенных элементов, которое – в соответствии с некоторым законом – может быть объединено в целостность. И полагаю благодаря этому определить нечто родственное платоновскому эйдосу или идее agathon, как и тому, что Платон в своем диалоге “Филеб, или высшее благо” называет agathon» [Кантор 1985: 101].

Такие ключевые для Кантора понятия, как «множество», «многое», «многообразие», «целостность», «совокупность», «число», находятся в центре «Философии арифметики». В ней Гуссерль говорит о числе и различии, вводя понятие «коллективирование» (Kolligieren), понимаемое как собирание в целое, которое представляет собой множество. Концепция «эйдетических сущностей» фиксируется в «Логических исследованиях», в «Идеях» нередко используется понятие «множество» [Гуссерль 2009: 459], а о формальном регионе, «совокупном, принадлежном к одному конкрету, наивысшем родовом единстве» [Там же: 61], Гуссерль говорит как о «пустой форме региона вообще» [Там же: 49].

4. Теория множеств в философии Флоренского и Лосева

Кантор писал, что, публикуя свои работы, «имел в виду главным образом двоякого рода читателей: с одной стороны, философов, следивших за развитием математики вплоть до новейшего времени, а с другой – математиков, которые знакомы с важнейшими фактами древней и новой философии» [Кантор 1985: 63]. Еще одним философом-математиком, испытавшим влияние канторовских идей, был П. А. Флоренский. Он опирался на математические идеи своего учителя, Н. В. Бугаева, бывшего наряду с Г. Кантором и Э. Гуссерлем учеником К. Вейерштрасса. Флоренский развивает учение Бугаева об аритмологии, основанное на идее прерывности и противостоящее господствовавшему в то время аналитическому мировоззрению, претендующему на возможность своими ресурсами объяснить все возможные явления.

Бугаев, а вслед за ним и Флоренский указывают на то, что все случайное и необычное, представляющееся исключением и выходящим из ряда вон, невозможно описать с аналитических позиций, мир развивается не только по эволюционному пути, но и через смену культурно-исторических типов, при помощи революций, переворотов и мировых катастроф. Именно и только аритмология позволяет органично вписать в себя действия конкретных личностей, обладающих целеполаганием и свободой воли. «Истина анализа, – пишет Бугаев, – отличается общностью и универсальностью, а истины аритмологии носят на себе печать своеобразной индивидуальности» [Бугаевъ 1905: 353], следовательно, «в мире господствует не одна достоверность. В нем имеет силу также и вероятность» [Там же: 365].

П. А. Флоренский приводит слова Р. Дедекинда, одного из первых сторонников канторовской теории множеств: «Если вообще пространство имеет реальное бытие, то ему нет надобности быть непрерывным. Бесчисленные его свойства оставались бы теми же, если бы оно было разрывным» [Дедекинд 1923: 18]. Развивая аритмологию Бугаева, Флоренский дополняет ее понятийным аппаратом теории множеств, позволяющим видеть порядок и в представляющемся хаотичным, и в не являющемся конечным.

В 1904 г. выходит статья Флоренского «О символах бесконечности (Очерк идей Г. Кантора)», первое в русской литературе развернутое изложение теории множеств Кантора, рассматриваемой в широком философском контексте. Флоренский был убежден, «что все возможные закономерности бытия уже содержатся в чистой математике как первом конкретном, а потому доступном использованию, самообнаружении принципов мышления – то, что можно было бы назвать математическим идеализмом; и в связи с этим убеждением явилась потребность построить философское миропонимание, опирающееся на углубленные основы математического познания» [Андроник 1982: 266]. Именно в соединении идей аритмологии, монадологии и теории множеств он видел возможность воплощения заложенной Пифагором идеи о создании учения, отражающего все области знания на математической основе.

«Основная математическая идея – идея группы – относится ко всему тому, в чем сознание производит синтез множественности в единство; уже этот синтез, будучи основной функцией сознания, делает математику как науку о группах применимой повсюду, где только функционирует сознание» [Флоренский 1906: 534], – пишет П. А. Флоренский. Считая этот метод универсальным, он применяет его для объяснения самых разных положений своей философии: и соотношение простых и сложных монад в эволюционной монадологии Бугаева, и соединение «триипостастности» и «единосущия» в Троице.

«И природа, и человек, – пишет Флоренский, – бесконечны; и по бесконечности своей, как равномощные, могут быть частями самих себя, причем части равномощны между собой и с целым» [Его же 1983: 233]. Аналогично он описывает и будущее государственное устройство: «Построить разумное государство – это значит сочетать свободу проявления данных сил отдельных людей и групп с необходимостью направлять целое к задачам, неактуальным индивидуальному интересу, стоящим выше и делающим историю» [Его же 2009: 7]. Революция также понимается в терминах теории множеств: она содержится всюду, она бесконечна и она не может быть последней в своем роде.

В «Философии имени» А. Ф. Лосев попытался совместить аритмологию П. А. Флоренского с феноменологией Э. Гуссерля, сохраняя, впрочем, и прямые отсылки к теории Г. Кантора. «Учение о множествах, – пишет Лосев, – я назвал бы аритмологией» [Лосев 1990: 202]. В следующих строках он непосредственно воспроизводит канторовские установки, связанные с проблематикой части и целого, с абстрактностью и универсальностью элементов-множеств: «Та дисциплина, к которой переходим мы, есть учение лишь о той стороне стихии мысли и разума, которая проявляется в сфере каждого отдельного эйдоса и притом со специфической точки зрения взаимоотношения целого и части. Не важно уже, какая именно это вещь, карандаш или перо. Важно только то, как получается в смысловом отношении всякая вещь, как соединятся отдельные элементы, которые в отдельности не суть эта вещь, в эту самую вещь» [Там же: 201].

«Морфе, или топос, – продолжает Лосев, – отличается от схемы тем, что она принимает во внимание и качество, топос частей, слагающихся в целое, но ее также не интересует качественное содержание цельного эйдоса в его отличии от всякого другого эйдоса. Учение о схеме может сколько угодно говорить о взаимоотношении эйдосов, но лишь с обязательным условием – вскрывать только чисто схемные взаимоотношения» [Лосев 1990: 201]. Далее Лосев прямо говорит, что «построить эту науку нам значительно легче потому, что она уже создана гением Г. Кантора, которому и принадлежит это учение об эйдетической схеме, или, как он выражается, о множествах, или об эйдетических числах. Схема и есть эйдетическое число, как бы идеальный контур вещи, рассмотренный с точки зрения взаимоотношения ее частей или элементов, или с точки зрения отношения ее частей или элементов к частям или элементам другой вещи. Если к этому прибавить еще и качественное содержание каждого элемента или части, то получилось бы новое и более богатое учение о схеме, и недалеко то будущее, которое создаст такую науку как необходимую часть учения о множествах или его применений к другим областям» [Там же: 201, 202].

«Аритмология, – заключает А. Ф. Лосев, – следовательно, есть логическое учение об эйдетической схеме, или об идеальном числе, то есть о смысле, рассмотренном с точки зрения подвижного покоя, как топология есть учение об эйдетической морфе, или об идеальном пространстве, то есть о смысле, рассмотренном с точки зрения самотождественного различия. Это – необходимое слагаемое общего учения об эйдетическом бытии, как оно конструируется логически, в логосе <...> диалектика и аритмология суть две первейшие и необходимейшие логические конструкции осмысленного, явленного бытия в его эйдосе» [Там же: 202].

5. Теория множеств в философии А. Бадью и проблема философских интерпретаций математических результатов

Ровно в тот год, когда был расстрелян П. А. Флоренский, на свет появился А. Бадью, снова сделавший теорию множеств событием в философии. Его книга «Бытие и событие» [Badiou 2006] была опубликована через сто лет после появления теории множеств. Как Гуссерль и Флоренский, Бадью снова говорит о необходимости философии вобрать возможности из математики в ее теоретико-множественном представлении, считая, что именно в таком виде математика может и должна стать универсальной онтологией. Но в отличие от своих предшественников А. Бадью использует и более поздние математические результаты, полученные К. Гёделем и П. Коэном.

«Математика – это онтология» – снова звучат слова. Именно абстрактность канторовского аппарата позволяет Бадью говорить о математике, политике, искусстве и любви на одном языке, не вводя меж ними различия в пространстве бытия. Математическая теорема, стихотворение, политическая акция могут быть событиями одного порядка. Пустое множество, имеющее нулевую мощность, но являющееся элементом любого множества, имеет в философии А. Бадью особое значение. И в любви, и в искусстве, и в политике, и в науке пустота содержится, но не представлена. Так вводится различие между принадлежностью и включенностью множества. Пустота отрицает, прерывает единое и, определенным образом дополняя, сопротивляется его тотальному подавлению.

Священника Флоренского и атеиста Бадью при столь различных мировоззренческих установках объединяет не только приверженность к идеям и терминологическому аппарату канторовской теории множеств, но и близость рассматриваемых ими сюжетов. Насколько вольно они интерпретировали теорию множеств и согласился ли бы сам Кантор с такими следствиями? Нередко компетентность и добросовестность мыслителей, использующих математические ресурсы и математические метафоры, ставятся под вопрос. Пример такой критики – книга А. Сокала и Ж. Брикмона «Интеллектуальные уловки: Критика современной философии постмодерна» [Сокал, Брикмон 2002].

Помимо того, что такого рода критика сама зачастую не выдерживает предлагаемой проверки на прочность, единого мнения относительно адекватности применения математических методов нет и внутри самой математики. Так, например, интуиционисты критикуют формалистов за распространение закона исключенного третьего на бесконечные множества и за принятие неконструктивных доказательств существования. И если внутри самой математики некоторые ориентиры правильности и строгости существуют, это еще не означает, что те же самые ориентиры распространяются и на философию, ограничивая произвол в выборе математических сюжетов и приемов. Так, например, философы отнюдь не всегда считаются с учением Святых Отцов, произвольно выбирая и удобным образом интерпретируя библейские сюжеты.

Кантор не читал Бадью, и с работами Флоренского он, скорее всего, тоже не был знаком. Известно, впрочем, что к попыткам философских интерпретаций математических понятий он относился достаточно строго. «Кант без серьезной предварительной критической работы оперирует понятием бесконечности при рассмотрении четырех вопросов, стараясь доказать, что на них с одинаковым правом можно дать утвердительные и отрицательные ответы, – пишет Кантор, – лишь благодаря смутному неотчетливому употреблению понятия бесконечности этому автору удалось вызвать серьезное отношение к его антиномиям и к тому же только у тех лиц, которые, подобно ему, предпочитают уклоняться от основательного математического рассмотрения подобных вопросов» [Кантор 1985: 266]. Также и у Гегеля, когда тот говорит о бесконечности, по словам Кантора, «все темно, туманно и противоречиво» [Там же: 280]. Такая оценка вызывает интерес, но нисколько не умаляет значения ни «Критики чистого разума» И. Канта, ни соответствующих работ Г. В. Ф. Гегеля.

Главным препятствием в работе с бесконечностью Кантор называл боязнь признания эквивалентности части и целого, которая на примере биекции двух отрезков разной длины еще в XIV в. была показана Т. Брадвардином в «Трактате о континууме» [Там же: 374]. В середине XIX в. о различных рангах актуальных бесконечностей говорил Б. Больцано в «Парадоксах бесконечного» [Bolzano 1851]. В более общем виде и с математической строгостью эта идея была развита Г. Кантором, отличавшим актуальную бесконечность от абсолютной бесконечности, с одной стороны, и от потенциальной – с другой.

Заключение

Канторовского понимания актуальной бесконечности как существующей и доступной человеческому уму придерживались и Гуссерль, и Флоренский, и Бадью. Каждому из них присуще стремление к описанию мира посредством абстрактных и универсальных форм, а также оптимистический платонизм, учитывающий и принимающий открытия математиков XIX и XX вв. Сам Кантор придавал своей теории «широкое философское значение» [Кантор 1985: 384]. Известно, что он отказался от чтения лекций по математике в пользу лекций по философии Лейбница [Там же: 385]. Что касается возможного отношения Кантора к интерпретациям его идей в богословии, то его как глубоко религиозного человека очень беспокоило негативное отношение многих современных ему теологов к теории множеств [Кантор 1985: 385].

При этом многие ключевые фигуры в истории философии, испытав непосредственное или опосредованное влияние канторовских идей, отклонились от тех или иных установок Кантора и создали богатую палитру идей, в которые были окрашены основные направления философии последних ста тридцати лет. Неопозитивизм и аналитическая философия; феноменология и другие течения двадцатого столетия, испытавшие влияние гуссерлевской философии; русская религиозная философия; философские аспекты проблемы сознания и искусственного интеллекта – все это непосредственно или опосредованно опиралось на результаты теории множеств.

Литература

Андроник, игум. (Трубачев А. С.). К 100-летию со дня рождения священника Павла Флоренского // Богословские труды. Сб. 23. М., 1982.

Бугаевъ Н. В. Математика и научно-философское міросозерцаніе // Математический сборник. 1905. Т. 25. № 2. С. 349–369.

Гуссерль Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. Кн. 1. Общее введение в чистую феноменологию. М. : Академический Проект, 2009.

Гуссерль Э. Картезианские медитации. М. : Академический Проект, 2010.

Гуссерль Э. Логические исследования. Т. 1. Пролегомены к чистой логике. М. : Академический Проект, 2011а.

Гуссерль Э. Логические исследования. Т. 2. Ч. 1. Исследования по феноменологии и теории познания. М. : Академический Проект, 2011б.

Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса : Матезис, 1923.

Декарт Р. Сочинения: в 2 т. Т. 1. М. : Мысль, 1989.

Кант И. Критика чистого разума. СПб. : Наука, 2008.

Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985.

Клайн М. Математика. Поиск истины. М. : РИМИС, 2007а.

Клайн М. Математика. Утрата определенности. М. : РИМИС, 2007б.

Лосев А. Ф. Философия имени. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990.

Сокал А., Брикмон Ж. Интеллектуальные уловки: Критика современной философии постмодерна. М. : Дом интеллектуальной книги, 2002.

Флоренский П. А. О типах возрастания // Богословский вестник. 1906. Т. 2. № 7. С. 530–568.

Флоренский П. А. Микрокосм и макрокосм // Богословские труды. 1983. Сб. 24. С. 230–241.

Флоренский П. А. О символах бесконечности (Очерк идей Г. Кантора) / П. А. Флоренский // Соч.: в 4 т. Т. 1. М. : Мысль, 1994. С. 79–128.

Флоренский П. А. Предполагаемое государственное устройство в будущем: Сборник архивных материалов и статей. М. : Городец, 2009.

Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М. : Мир, 1966.

Хинтикка Я. О Геделе. Гёдель К. Статьи / сост., ред. и перев. В. В. Целищева, В. А. Суровцева. М. : Канон+, РООИ «Реабилитация», 2014.

Badiou A. Being and Event. London : Continuum, 2006.

Bolzano B. Paradoxieren des Unendlichen. Herausgegeben von Prihonsky. Leipzig, 1851.

Brouwer L. Intuitionism and Formalism. Inaugural Address at the University of Amsterdam, read October 14, 1912.

Husserl E. Philosophy of Arithmetic: Psychological and Logical Investigations – with Supplementary Texts from 1887–1901. Dordrecht; Boston : Kluwer Academic Publishers, 2003.

Shaposhnikov V. Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. P. i. Mathematics Absolutized // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016a. Vol. 44. No. 1. Pp. 31–54.

Shaposhnikov V. Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. P. ii. The Quest for Autonomous Foundations // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016b. Vol. 44. No. 1. Pp. 147–168.